

IURY BRUNO TARICANO MARCATTO

**OTIMIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE UMA
ESTRUTURA DE TRELIÇAS VISCO-ELÁSTICAS ATRAVÉS DO
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Trabalho de formatura do curso de
graduação do Departamento de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

SÃO PAULO

2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Otimização do comportamento vibratório de uma estrutura de
treliças visco-elásticas através do Método de Otimização
Topológica**

Iury Bruno Taricano Marcatto

Orientador: Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

SÃO PAULO
2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Otimização do comportamento vibratório de uma estrutura de
treliças visco-elásticas através do Método de Otimização
Topológica**

Trabalho de formatura do curso de
graduação do Departamento de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Iury Bruno Taricano Marcatto

Orientador:

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica

SÃO PAULO

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Marcatto, Iury Bruno Taricano

Otimização do comportamento vibratório de uma estrutura de treliças viscoelásticas através do método de otimização topológica / I.B.T. Marcatto. – São Paulo, 2011.
87 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Método de otimização topológica 2. Método dos elementos finitos 3. Viscoelasticidade 4. Treliças viscoelásticas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador, o Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pela grande ajuda durante a execução deste trabalho e à minha família, em especial à minha mãe, Vanda Taricano Marcatto, por sempre confiar de forma irrestrita nas minhas capacidades e por acreditar, com muito apoio, dedicação e empenho, que meus sonhos podem se tornar realidade.

“Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara.”

José Saramago

*“Dias maravilhosos em que os jornais vêm cheios de poesia... e do lábio do amigo
brotam palavras de eterno encanto... Dias mágicos... em que os burgueses espiam,
através das vidraças dos escritórios, a graça gratuita das nuvens...”*

Mario Quintana

RESUMO

Com o constante avanço da capacidade de processamento dos computadores nos últimos anos, a aplicação de métodos numéricos de otimização no projeto de sistemas mecânicos tem se intensificado, objetivando cada vez um elevado desempenho da estrutura projetada, seja ele referenciado a custo, massa da estrutura, ou a qualquer outra característica de interesse. Adicionalmente, com o surgimento de novas classes de materiais, como também utilização de materiais tradicionais em novas aplicações, tem proporcionado um imenso campo de atuação para os métodos de otimização. Neste trabalho, procura-se investigar a utilização do fenômeno da viscoelasticidade em estruturas de treliça, de modo a reduzir seus deslocamentos, quando submetidas a carregamentos dinâmicos. Para isso, são utilizados conceitos do método de otimização topológica na estrutura de treliças, tornando possível encontrar configurações de áreas das barras que minimizem a energia associada ao seu comportamento dinâmico. Para simulação das treliças é utilizado um solver programado em Matlab e para validação dos resultados, o software comercial Ansys. Ao final do trabalho, é possível identificar como as áreas de barras e amortecedores (modelagem para a viscosidade) são alocadas para criação de estruturas que apresentam uma grande redução no valor da energia associada ao comportamento dinâmico.

Palavras-chave: Método de Otimização Topológica, Método dos Elementos Finitos, Viscoelasticidade, Treliças Visco-elásticas.

ABSTRACT

With the constant advances in processing power of computers in recent years, the application of optimizing numerical methods for the design of mechanical systems has intensified, aiming at increasingly high performance of the projected structure, whatever it is referenced to, for example, cost, mass of the structure, or to any other feature of interest. Additionally, with the emergence of new classes of materials, as well as use of traditional materials in new applications, has provided an immense field for the optimization methods. In this paper, we attempt to investigate the use of the phenomenon of viscoelasticity in truss structures, in order to reduce characteristic displacements when they are subjected to dynamic loading. To this end, concepts of topology optimization are used in the structure, making it possible to find truss areas settings that minimize the energy associated with its dynamic behavior. For truss simulation is used a self-programmed solver in Matlab and for the validation of results, the commercial software Ansys. At the end, it can be identified settings of areas for bars and dampers (for viscoelasticity modeling) and how they are allocated for the creation of structures that, show large reduction in the amount of energy associated to the dynamic behavior.

Key-words: Topology Optimization, Finite Element Method, Viscoelasticity, Viscoelastic Truss.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - (a) Material puramente elástico, (b) Material visco-elástico	3
Figura 1.2 - Exemplo de mecanismo flexível [1].....	4
Figura 1.3 - Exemplo de aplicação do MOT para um domínio tridimensional [3]	5
Figura 2.1 - Exemplo de viga formada por elementos visco-elásticos de treliça – (a) lâmina de alumínio, (b) núcleo de material visco-elástico	6
Figura 4.1 - Interfaces dos Softwares Ansys e ModeFrontier.....	9
Figura 4.2 - Workflow criado com o ModeFrontier.....	11
Figura 5.1 - Modelos básicos para descrição de materiais visco-elásticos : (a) Modelo de Kelvin-Voigt (b) Modelo de Maxwell.....	14
Figura 5.2 - Modelo para o comportamento elástico: (a) linear (b) não-linear	15
Figura 5.3 - Modelo para representação viscosa: (a) Modelo físico de um amortecedor (b) Representação esquemática (c) Viscosidade linear (d) Viscosidade não-linear.....	15
Figura 5.4 - Deformação e recuperação do modelo de Kelvin-Voigt sobre atuação de tensão constante	17
Figura 5.5 - Modelo de Maxwell: (a) Fluência (b) Relaxamento	20
Figura 6.1 - Discretização de um domínio com o uso de elementos finitos.....	24
Figura 6.2 - Barra de tração sujeita aos carregamentos de peso próprio e força externa	26
Figura 6.3 - Carregamento quase-estático da barra.....	33
Figura 6.4 - Trabalho da força peso para um elemento infinitesimal de barra.....	34
Figura 6.5 - Trabalho das forças internas para um elemento infinitesimal de barra..	35
Figura 6.6 - (a) Trabalho das forças externas (força peso) , (b) Trabalho das forças internas.....	36
Figura 7.1 - Exemplo de otimização paramétrica [4]	43
Figura 7.2 - Exemplo de otimização de forma [4].....	43
Figura 7.3 - Exemplo de otimização topológica [4].....	44

Figura 8.1 - Etapas de um algoritmo genético.....	47
Figura 8.2 - Exemplo de mutação	48
Figura 8.3 - Exemplo de cruzamento (Crossover) (a) dois indivíduos são escolhidos (b) um ponto do gene sofre crossover (c) são recombinadas as características, gerando dois novos indivíduos.....	49
Figura 9.1 - Estrutura de treliças analisada.....	50
Figura 10.1 - Elemento com 4 graus de liberdade [6].....	53
Figura 10.2 - Estrutura com 2 barras visco-elásticas	54
Figura 10.3 - Resultados obtidos com o solver desenvolvido com o Ansys	55
Figura 10.4 - Resultados obtidos com o solver desenvolvido em Matlab.....	55
Figura 10.5 - Caso $f = 0.7$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada.....	58
Figura 10.6 - Caso $f = 0.7$ - Estrutura de treliças otimizada	58
Figura 10.7 - Caso $f = 0.7$ - Distribuição ótima de elementos elásticos.....	59
Figura 10.8 - Caso $f = 0.7$ - Distribuição ótima de amortecedores	59
Figura 10.9 - Caso $f = 0.5$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada.....	60
Figura 10.10 - Caso $f = 0.5$ - Estrutura de treliças otimizada	60
Figura 10.11 - Caso $f = 0.5$ - Distribuição ótima de elementos elásticos.....	61
Figura 10.12 - Caso $f = 0.5$ - Distribuição ótima de amortecedores	61
Figura 10.13 - Caso $f = 0.2$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada.....	Erro! Indicador não definido.
Figura 10.14 - Caso $f = 0.2$ - Estrutura de treliças otimizada	62
Figura 10.15 - Caso $f = 0.2$ - Distribuição ótima de elementos elásticos.....	63
Figura 10.16 - Caso $f = 0.2$ - Distribuição ótima de amortecedores	63
Figura 10.17 - Exemplo de estrutura utilizando um número elevado de elementos de treliça para aplicação da otimização topológica	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Cronograma	8
Tabela 6.1 - Comparação entre o Método de Galerkin e o Princípio dos Trabalhos Virtuais	39
Tabela 10.1 - Propriedades utilizadas na simulação	54
Tabela 10.2 - Paramêtros dos algoritmos genéticos	57

SUMÁRIO

RESUMO.....	III
ABSTRACT	IV
LISTA DE FIGURAS	V
LISTA DE TABELAS	VII
1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO	3
2. OBJETIVOS	6
3. CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES	8
4. METODOLOGIA	9
5. VISCOELASTICIDADE	12
5.1 Os Fenômeno da Viscoelasticidade	12
5.2 Os modelos de Kelvin-Voigt e Maxwell	13
6. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	22
6.1 Introdução	22
6.2 Princípio do Método dos Elementos Finitos	23
6.3 Equações Básicas da Mecânica dos Corpos Deformáveis	25
6.4 Forma Fraca da Equação Diferencial.....	28
6.4.1 Método dos Resíduos Ponderados.....	29
6.4.2 Método de Galerkin	30
6.4.3 Forma Fraca da Equação Diferencial pelo Método de Galerkin	31
6.4.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais	32
7. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	42
8. ALGORITMOS GENÉTICOS	45
8.1 Introdução	45
8.2 Características Gerais.....	46

8.3	Operadores Genéticos	48
8.4	Outros Parâmetros Importantes	49
9.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	50
10.	RESULTADOS	53
10.1	Validação	53
10.2	Otimização	56
11.	CONCLUSÕES	64
	ANEXO A – Solver programado em Matlab	65
	ANEXO B – Funções em Matlab utilizadas no solver.....	72
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Amortecimento estrutural se caracteriza como o processo de se dissipar energia mecânica de um sistema, objetivando a redução de vibrações, que podem originar não somente altas amplitudes de movimento como também altos níveis de ruído. Tal procedimento acaba, de forma benéfica, por aumentar a vida útil do sistema em questão, a partir da redução de fadiga estrutural.

Sistemas de amortecimento passivos (isto é, nos quais a dissipação de energia ocorre internamente ao sistema devido à presença de juntas estruturais, suportes ou algum outro elemento) são largamente utilizados em aplicações de Engenharia com esta finalidade. Estruturas construídas de elementos formados de várias camadas de materiais diferentes (estruturas sanduíche) são especialmente eficientes na tarefa de dissipação de energia e assim de amortecimento do sistema.

Neste contexto, a aplicação de materiais visco-elásticos torna-se interessante e útil devido ao comportamento característico desta classe de materiais. A junção de características de materiais puramente elásticos e de puramente viscosos produzem na prática uma deformação dependente do tempo e uma consequente perda de energia quando um carregamento é aplicado (Figura 1.1), o que age de forma favorável a redução de vibrações.

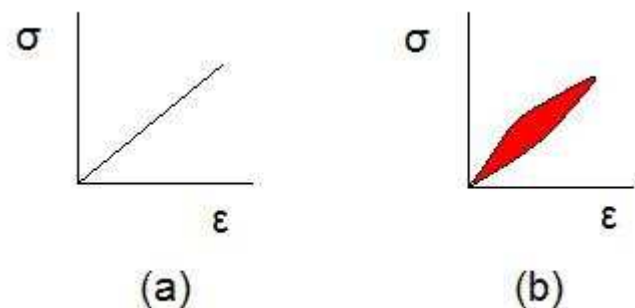


Figura 1.1 - (a) Material puramente elástico, (b) Material visco-elástico

Aplicações de sistemas como estes apresentados, se encontram em elementos estruturais, nos quais se deseja apresentar um comportamento mais eficiente de redução de amplitudes de movimentos e consequentemente de amortecimento como: elementos de suspensão, coxim do motor de veículos, entre outros. Grande destaque tem-se também aplicabilidade nos chamados mecanismos flexíveis, nos quais a movimentação da estrutura é dada por sua flexibilidade e não pela presença de pinos, juntas (Figura 1.2). Mecanismos flexíveis podem ser encontrados em mecanismos de mecânica de precisão, área biomédica e mais recentemente nos microeletromecanismos (MEMS em inglês). Mais informações sobre mecanismos flexíveis podem ser encontras em [1] e [2].

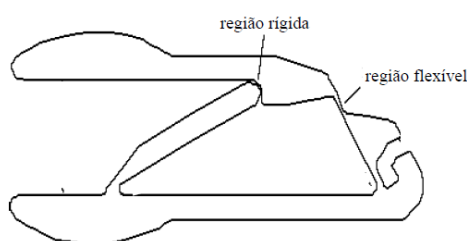


Figura 1.2 - Exemplo de mecanismo flexível [1]

Para o projeto de tais mecanismos, o método de otimização topológica (MOT) tem se mostrado a mais genérica e sistemática das técnicas empregadas. Em sua implementação combina-se um método de otimização com o método dos elementos finitos (MEF). A introdução do método de otimização topológica no projeto destas estruturas busca a adequação do sistema projetado a restrições construtivas, de segurança, entre outras, de modo que o emprego de material na construção do sistema seja realizado da forma mais eficiente possível, reduzindo custos (Figura 1.3).

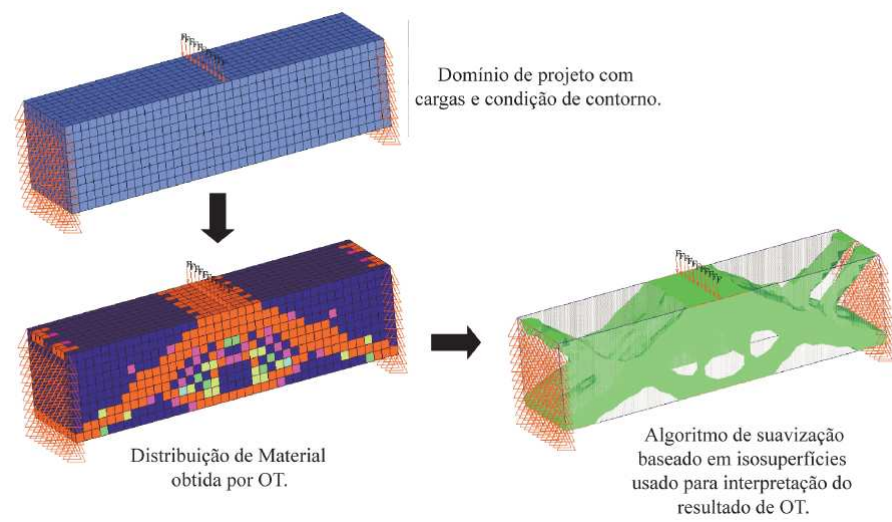


Figura 1.3 - Exemplo de aplicação do MOT para um domínio tridimensional [3]

2. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é otimizar o comportamento vibratório de uma estrutura de treliças através do uso do método de otimização topológica. Pretende-se desta forma, otimizar a resposta no tempo da estrutura em questão, quando esta é submetida a ação de um determinado carregamento. Com este intuito, são utilizados elementos de treliça com comportamento visco-elástico, sendo a viscoelasticidade a principal fonte de amortecimento da estrutura, promovendo assim a absorção de vibrações da estrutura, quando esta estiver submetida a carregamentos (Figura 2.1).

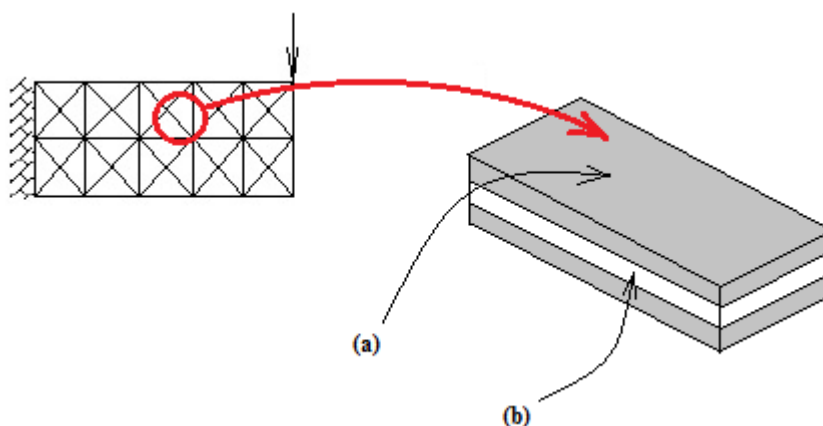


Figura 2.1 - Exemplo de viga formada por elementos visco-elásticos de treliça – (a) lâmina de alumínio, (b) núcleo de material visco-elástico

Para a modelagem da viscoelasticidade, é utilizado o modelo de Voigt, no qual se emprega um elemento elástico em paralelo com um elemento de dissipação viscosa, para a reprodução aproximada dos comportamentos visco-elásticos (para mais detalhes ver 5.2).

Como função objetivo para a otimização é utilizada uma medida de energia associada ao comportamento dinâmico da estrutura, quando submetida a carregamentos, tornando assim possível, obter para quais valores de seções transversais das barras de treliça, que serão empregadas neste estudo como variáveis de projeto, obtém-se comportamentos dinâmicos com menores valores deste parâmetro de energia associada.

3. CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES

As atividades serão realizadas de acordo com o seguinte cronograma (Tabela 3.1):

Tabela 3.1 - Cronograma

A1								
A2								
A3								
A4								
A5								
A6								
A7								
A8								
Ativ.	Abril	Maio	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro

A1 Familiarização com os softwares (Ansys/ModeFrontier)

A2 Estudo teórico – Materiais visco-elásticos

A3 Simulação Ansys – Estrutura visco-elástica simples

A4 Estudo teórico – Otimização Topológica

A5 Formulação do problema de otimização

A6 Simulação Matlab – Estrutura visco-elástica simples

A7 Integração - Matlab + ModeFrontier

A8 Otimização do comportamento vibratório da estrutura

4. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do projeto proposto, as atividades foram divididas nas seguintes etapas:

- Familiarização com os softwares (Ansys/ModeFrontier);
- Estudo teórico – Materiais visco-elásticos;
- Simulação Ansys – Estrutura visco-elástica simples;
- Estudo teórico – Método de Otimização Topológica;
- Formulação do problema de otimização;
- Simulação Matlab - Estrutura visco-elástica simples;
- Integração Matlab + ModeFrontier;
- Otimização do comportamento vibratório da estrutura;

No início do projeto, a fase de familiarização com os softwares que foram utilizados foi de extrema importância no sentido de criar os conhecimentos básicos de utilização dos programas Ansys e ModeFrontier, de modo que a realização das tarefas não fossem prejudicadas (Figura 4.1).

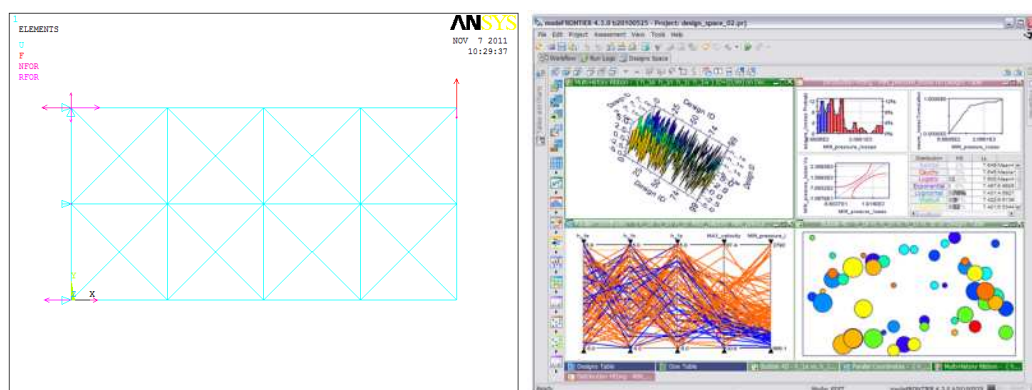


Figura 4.1 - Interfaces dos Softwares Ansys e ModeFrontier

Foi realizado a seguir um estudo das bases teóricas sobre materiais visco-elásticos. Caracterização, comportamentos básicos, diferenças com relação a outros tipos de materiais e exemplos serão conteúdos abordados.

Com estes conceitos consolidados, a próxima tarefa foi simular, no software comercial de análise estrutural Ansys, o comportamento de uma estrutura visco-elástica submetida a um carregamento. Esta simulação teve por objetivo viabilizar a validação dos resultados que seriam obtidos posteriormente com o solver feito em Matlab.

O aprofundamento nas bases do método de otimização topológica ocorreu a seguir objetivando não somente o aprendizado de sua formulação como também vantagens, desvantagens e diferenças perante outras abordagens de otimização.

De modo a conseguir otimizar eficientemente o comportamento vibratório da viga apresentada na introdução deste relatório, a formulação do problema de otimização é de importância fundamental. Características e limitações construtivas da estrutura analisada (como condições de contorno, carregamentos aplicados e restrições de dimensionamento) são levadas em consideração na determinação da função objetivo (função que se quer otimizar) e nas restrições que limitam as possíveis soluções do problema.

Após estas etapas ocorreu a integração do solver (em Matlab) responsável pela modelagem do comportamento estrutural do sistema com o software responsável pela otimização da estrutura. Para a função de otimização foi empregado o software comercial ModeFrontier, que permite a comunicação e integração de vários programas de desenvolvimento de produtos (Matlab, Catia, Ansys, Abaqus, etc) através da construção de um "Workflow", que descreve passo a passo o caminho das informações durante o processo de cálculo.

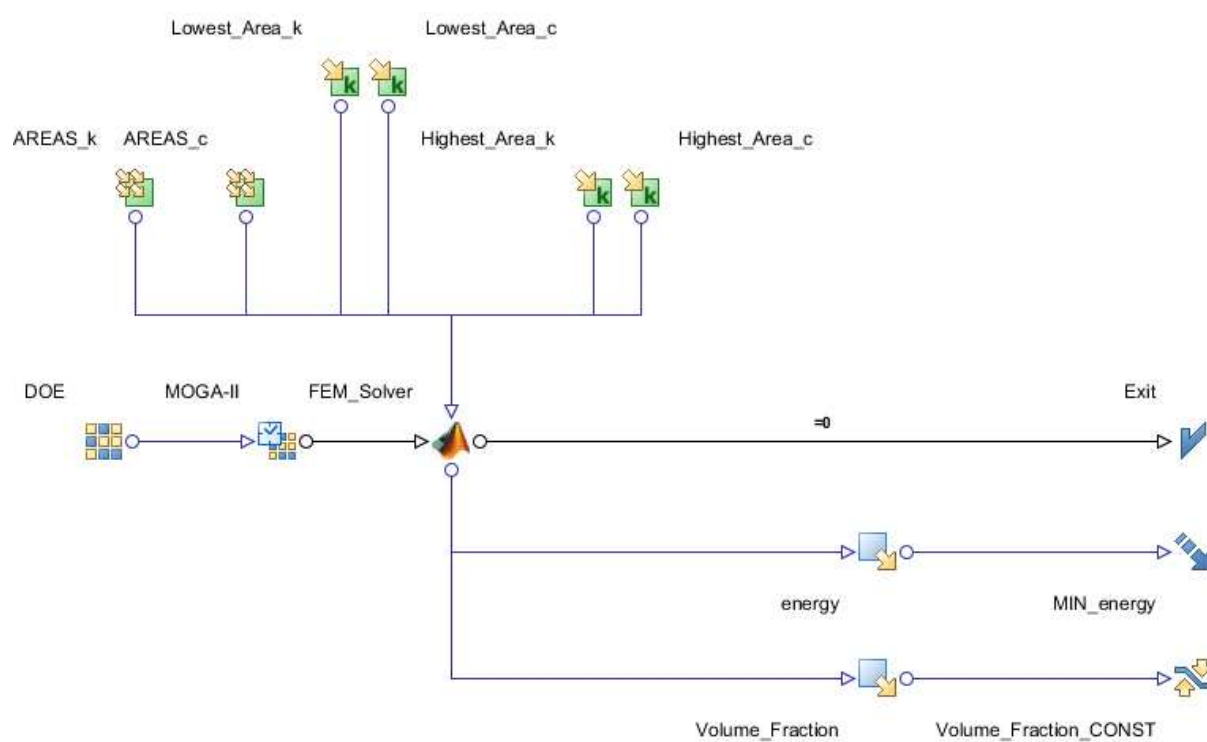


Figura 4.2 - Workflow criado com o ModeFrontier

5. VISCOELASTICIDADE

5.1 Os Fenômeno da Viscoelasticidade

Para descrever do comportamento de muitos materiais sólidos, submetidos a baixas deformações, é utilizada com frequência a *lei de Hooke*, que caracteriza uma relação de proporcionalidade entre a tensão σ e a deformação ε , presentes no material (aqui classificado como linear-elástico):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.1)$$

onde, E representa o módulo de Young ou módulo de elasticidade. A *lei de Hooke* para materiais linear-elásticos pode também ser escrita utilizando-se o conceito de Flexibilidade J :

$$\varepsilon = J\sigma, \quad (5.2)$$

que, no campo da resistência dos materiais, pode ser definida como o inverso do módulo de elasticidade:

$$E = \frac{1}{J} \quad (5.3)$$

Os materiais visco-elásticos, entretanto, apresentam propriedades não somente elásticas (como dos sólidos, descrita normalmente pela lei de Hooke), mas também viscosas (como nos fluidos).

As propriedades de resistência e rigidez dos materiais podem ser ilustradas através do chamado diagrama de tensão-deformação, que é obtida através da realização de um ensaio de tração. Neste ensaio, aplica-se em uma amostra de um material padronizado uma carga crescente, de modo a provocar sua fratura. Desta forma é possível obter, qual o comportamento deste material entre as variáveis deformação e tensão correspondente.

Como visto na introdução deste trabalho, para os materiais com comportamento linear-elástico, este diagrama apresenta-se como uma reta de inclinação constante (numericamente idêntico ao módulo de elasticidade do material), quando os valores de tensão permanecem menores do que a tensão limite de proporcionalidade do material ensaiado.

Entretanto para os materiais ditos visco-elásticos, a curva tensão-deformação apresenta uma diminuição de sua inclinação à medida que o material é carregado. Quando o material é descarregado, o comportamento entre as variáveis tensão e deformação percorre um caminho diferente do que quando ele foi carregado. Isto significa que o carregamento e descarregamento do material não é instantâneo, como é admitido para materiais linear-elásticos, e sim, que os materiais visco-elásticos apresentam uma relação entre tensão e deformação dependente do tempo.

5.2 Os modelos de Kelvin-Voigt e Maxwell

Para a modelagem dos materiais visco-elásticos são normalmente usados modelos que reúnem elementos elásticos (representados por molas) e elementos viscosos (representados por amortecedores). Os modelos mais comuns são:

- modelo de *Kelvin-Voigt* - no qual um elemento de mola é ligado em *paralelo* com um amortecedor;
- modelo de *Maxwell* – no qual um elemento de mola é ligado em *série* com um amortecedor.

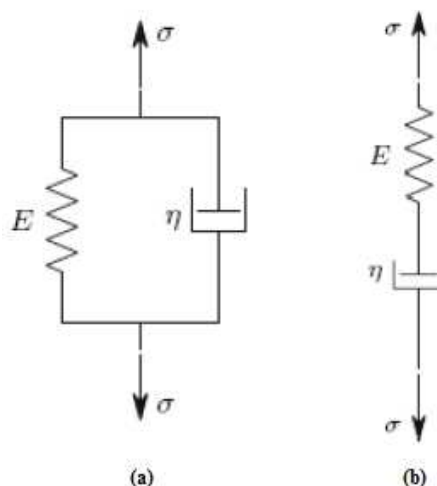


Figura 5.1 - Modelos básicos para descrição de materiais visco-elásticos : (a) Modelo de Kelvin-Voigt
(b) Modelo de Maxwell

O comportamento elástico de um modelo pode se facilmente entendido imaginando-se a ação de uma mola presa por uma extremidade. Quando esta é submetida à ação de uma força F na outra extremidade, produz um deslocamento δ . Como já dito anteriormente, este deslocamento δ aparece instantaneamente à aplicação da força F , ou seja, o carregamento do material devido à força F não depende do tempo. Adicionalmente, a relação entre a força F e o deslocamento δ igual seja durante o carregamento ou descarregamento do material, ou seja, durante o carregamento ou descarregamento de um material elástico linear, a linha reta da Figura 5.2(a) é sempre percorrida, seja no sentido ascendente (carregamento) como no descendente (descarregamento). Estes conceitos podem ser igualmente expandidos para diagramas que relacionam as variáveis tensão e deformação.

Em contrapartida, o comportamento viscoso é modelado esquematicamente através de um pistão, que contém um fluido em sua cavidade e que será pressionado pelo êmbolo através da atuação de uma força P (Figura 5.3a). O êmbolo apresenta um pequeno orifício que permite a passagem do líquido, à medida que a força P produz um deslocamento do êmbolo para baixo. Desta maneira, pode-se dizer que a força P é proporcional não ao deslocamento do embolo δ e sim à sua taxa de variação $\dot{\delta}$. Em termos de tensão e deformação, a seguinte lei constitutiva pode ser escrita:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5.4)$$

Para melhor entendimento, é possível ver na Figura 5.2 e Figura 5.3, o comportamento puramente elástico (linear e não linear) de uma mola e puramente viscoso (linear e não linear) de um amortecedor. A análise presente neste estudo se resumirá no comportamento linear das parcelas elástica e viscosa.

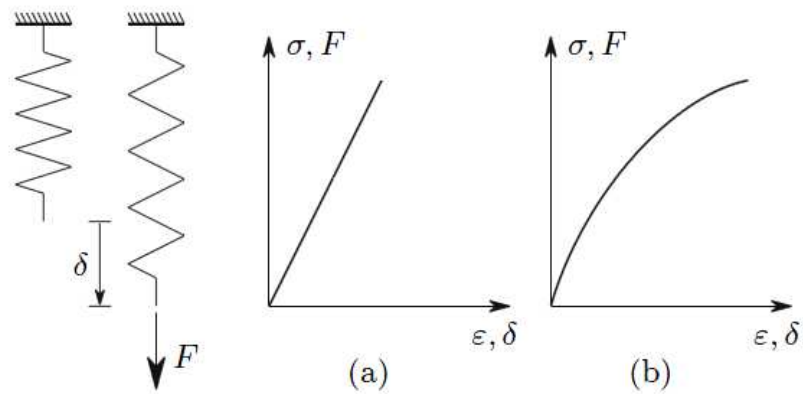


Figura 5.2 - Modelo para o comportamento elástico: (a) linear (b) não-linear

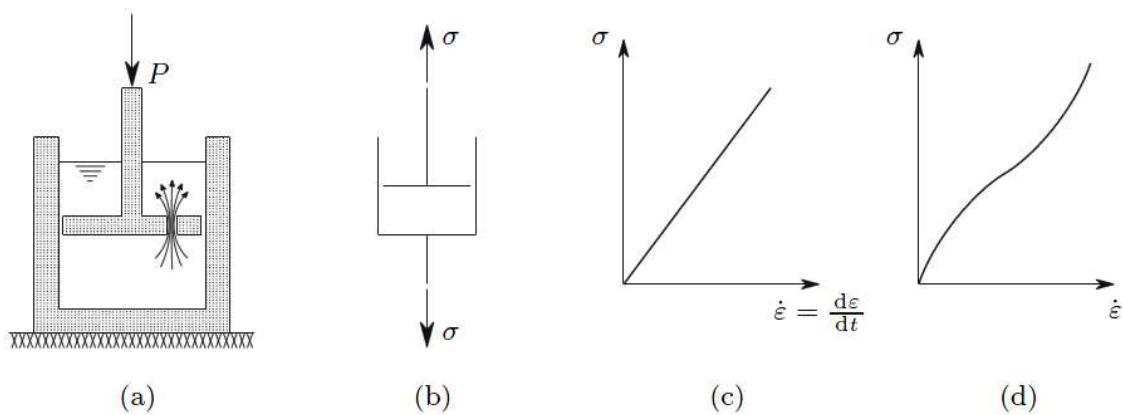


Figura 5.3 - Modelo para representação viscosa: (a) Modelo físico de um amortecedor (b) Representação esquemática (c) Viscosidade linear (d) Viscosidade não-linear

Quando se lida com os efeitos elásticos e viscosos lineares, as leis constitutivas dos modelos de Kelvin-Voigt e de Maxwell podem ser obtidas através da superposição de esforços. Para o modelo de Kelvin-Voigt, por exemplo, pode-se escrever que a tensão total é soma da tensão devida a componente elástica com a tensão devida a componente viscosa:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5.5)$$

Para a construção da expressão (5.5), foi utilizado para caracterizar a componente viscosa do modelo, a lei de Newton para viscosidade, descrito pela Figura 5.3. Considerando a tensão normal $\sigma = \sigma_o$ constante, a equação (5.1) representa uma equação diferencial, que pode ser resolvida em $\varepsilon(t)$.

Considerando que sua solução particular pode ser escrita como:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E}, \quad (5.6)$$

a solução geral da equação diferencial (5.5), é dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} + C e^{-\frac{E}{\eta}t}. \quad (5.7)$$

Admitindo que para $t = t_o$, tem-se deformação nula $\varepsilon = 0$, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} \left[1 - C e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_o)} \right]. \quad (5.8)$$

Desta maneira a expressão (5.8), representa a deformação $\varepsilon(t)$, durante o carregamento do material. Para se analisar o descarregamento, admite-se que para $t = t_1$ (sendo $t_1 > t_0$), tem-se a deformação $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$ e $\sigma_o = 0$. O instante $t = t_1$ é caracterizado pelo instante, no qual ocorre o descarregamento do material (tensão σ_o se torna instantaneamente zero), o que causa novamente a diminuição gradativa de ε a zero (Figura 5.4). Quando se substitui estas condições de contorno na equação diferencial (5.7), obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)}. \quad (5.9)$$

A Figura 5.4 ilustra o comportamento do modelo de Kelvin durante o carregamento e descarregamento do material:

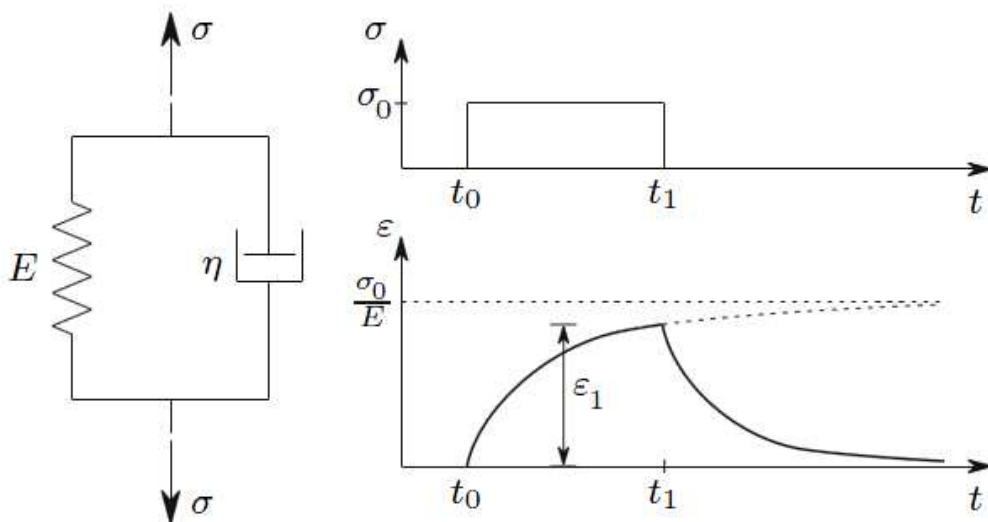


Figura 5.4 - Deformação e recuperação do modelo de Kelvin-Voigt sobre atuação de tensão constante

Como pode ser visto na Figura 5.4, embora durante o carregamento e descarregamento do material, ocorra perda de energia, a deformação é totalmente

recuperável sendo que $\varepsilon(t)$, tende, após o descarregamento, de maneira assintótica a zero.

A hipótese presente no modelo de Kelvin-Voigt, de que a tensão σ_o é constante e que ocorre somente variação da deformação no tempo caracteriza o chamado *problema de fluência*. Considerando que o amortecedor não se deforma instantaneamente, (pois para que isso ocorresse, seria necessário aplicação de uma tensão infinita para que houvesse uma taxa de deformação igualmente infinita - Ver equação (5.4)), no instante que a tensão é aplicada (t_o), o esforço é suportado totalmente pelo amortecedor, pois a mola não está deformada e, portanto, sua tensão é nula. A medida que a deformação aumenta, aumenta também a tensão na mola, o que faz reduzir a tensão no amortecedor e por consequência reduzir sua taxa de deformação. Esta taxa, então, se torna nula, somente quando todo o carregamento é transferido para a mola, o que acontece teoricamente, para $t \rightarrow \infty$, quando $\varepsilon = \frac{\sigma_o}{E}$.

O procedimento de recuperação da deformação durante o descarregamento do material ocorre de maneira semelhante. Para o instante t_1 , quando a tensão σ_o se anula, a deformação ε_1 presente no sistema produz uma tensão na mola, que deve ser equilibrada por uma tensão em sentido contrário no amortecedor. Esta tensão do amortecedor é que causará a recuperação da deformação. À medida que a deformação no sistema diminui, diminui também a taxa de recuperação, até a deformação ser totalmente recuperada, o que ocorre para $t \rightarrow \infty$, quando $\varepsilon = 0$.

A quantidade $\frac{E}{\eta}$ representa o tempo de reação do modelo diante de uma mudança na aplicação de um esforço e é usualmente chamada de módulo de fluência ou coeficiente de retardamento. Seu inverso $\frac{\eta}{E}$ tem dimensão de tempo e é designado como tempo de retardamento.

Assim como a superposição de esforços para o modelo de Kelvin-Voigt, pode ser feita também para o modelo de Maxwell, no qual se associa em série um elemento de mola com um elemento viscoso. Para este modelo, se deve somar as taxas de deformação na mola com a do amortecedor:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (5.10)$$

Contrariamente ao modelo de Kelvin-Voigt, a obtenção da deformação com a Equação (5.10) é direta quando o nível de tensão é mantido constante. Como pode ser visto na Figura 5.5(a), a função $\varepsilon(t)$ tem comportamento linear a partir do momento em que o material é carregado. Quando ele é descarregado instantaneamente, a taxa de deformação se torna nula, de acordo com a Equação (5.10), fazendo com que a deformação fique constante a partir do instante, que o material é descarregado (t_1).

Outra análise possível para o modelo de Maxwell pode ser vista na Figura 5.5(b). Neste caso é aplicada ao modelo, a partir do instante $t = t_o$, uma deformação constante. Para obtenção da tensão, mantendo a deformação constante, deve-se novamente resolver a equação (5.10), como uma equação diferencial em $\sigma(t)$.

Como a deformação é mantida constante, tem-se que $\dot{\varepsilon} = 0$. O que implica em:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0. \quad (5.11)$$

A segunda condição de contorno expressa que para $t = t_o$, a tensão σ no sistema é igual a:

$$\sigma = E\varepsilon_0. \quad (5.12)$$

Reunindo as condições de contorno (5.11) e (5.12), obtém-se a solução da equação diferencial (5.10):

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_0)}. \quad (5.13)$$

O comportamento do modelo de Maxwell é ilustrado na Figura 5.5. A forma da curva de relaxamento pode ser explicada de maneira semelhante à realizada para o modelo de Kelvin-Voigt, sobre tensão constante (fenômeno de fluência). Como o amortecedor não se deforma instantaneamente, como mencionado anteriormente, a deformação imposta é primeiramente repassada integralmente para a mola, causando um esforço inicial na mola $\sigma = E\varepsilon_0$. Esta tensão decai com o tempo, à medida que o amortecedor se deforma, enquanto que esta deformação causa uma redução na deformação da mola (a deformação total permanece constante). Para $t \rightarrow \infty$, o sistema tende a perder toda a tensão que tinha no instante inicial, devido ao relaxamento promovido pelo amortecedor.

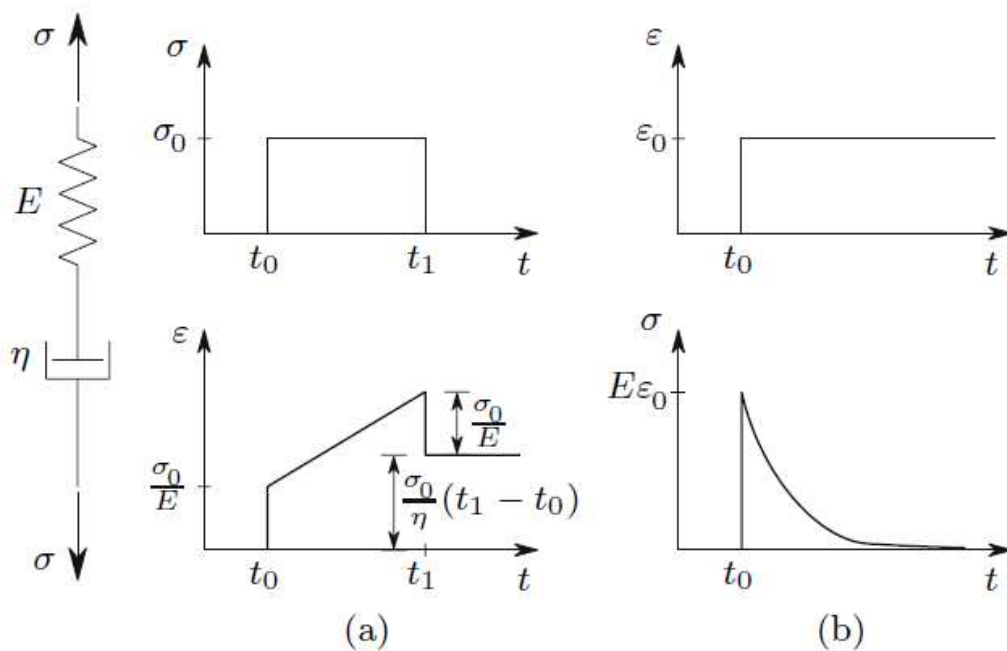


Figura 5.5 - Modelo de Maxwell: (a) Fluência (b) Relaxamento

Embora os modelos de Kelvin-Voigt e Maxwell descrevam qualitativamente os fenômenos visco-elásticos básicos, quando se deseja níveis mais elevados de

precisão na descrição destes fenômenos, outros modelos mais sofisticados precisam ser utilizados. Normalmente utiliza-se para este fim, agrupamentos em série de elementos de Kelvin-Voigt ou agrupamentos em paralelo de elementos de Maxwell.

6. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

6.1 Introdução

Métodos de simulação numérica como o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se tornado nos últimos anos uma parte fundamental no processo construtivo de um sistema. A utilização de programas comerciais de simulação facilitam sua aplicação, tornando-a cada vez mais confortável. É possível de uma maneira relativamente fácil a partir de arquivos CAD, obter por exemplo uma análise de tensões de uma peça submetida a determinados esforços. No entanto, os resultados obtidos nem sempre apresentam a qualidade desejada para uma certa análise. Neste contexto é essencial o correto entendimento das bases do método para ser possível se obter com qualidade, o máximo que ele é possível nos oferecer.

Toda simulação numérica é composta de 4 etapas:

1. Definição do problema e da realidade que se deseja descrever;
2. Desenvolvimento de um modelo: Obtenção das equações que descrevem o fenômeno físico em questão;
3. Utilização de métodos de solução numérica;
4. Representação, Avaliação e interpretação dos resultados.

Na primeira etapa são importantes as definições dos fenômenos físicos que contribuem para o que se quer analisar com a simulação. Efeitos de segunda ordem ou que tem pouca influência no que se quer analisar, por exemplo, dificultam a obtenção de uma solução. Quando se deseja obter uma solução analítica para um certo problema, a introdução destas dificuldades extras pode inclusive tornar impossível a obtenção de uma solução. Portanto nesta etapa é importante o questionamento sobre os fenômenos a serem considerados na simulação.

Na segunda etapa, desenvolve-se um modelo, que representa o fenômeno físico de forma idealizada, ou seja, considera-se no modelo somente os efeitos que

são importantes para a análise em questão. Medidas simplificadoras relacionadas aos materiais, geometria, condições de contorno e a restrições de carregamentos e deslocamentos são utilizadas e devem ser sempre lembradas e ressaltadas durante a realização da etapa 4.

Na terceira etapa são escolhidos métodos numéricos adequados para a solução do problema proposto, que se utilizam em geral da discretização do domínio de trabalho para se obter uma solução.

Enfim a quarta etapa compreende a representação e interpretação crítica dos resultados obtidos. Simplificações adotadas na etapa 2 devem ser agora discutidas e verificadas com o objetivo principal de se encontrar possíveis erros, que podem estar presentes em quaisquer uma destas quatro etapas. Não menos importante do que as outras etapas, a representação e interpretação dos resultados desempenham um papel muito importante na determinação, se o que foi adotado anteriormente foi adequado para se obter uma solução precisa o suficiente e de uma maneira eficiente. Especialmente importante desempenha o papel da precisão quando se discute a eficiência da solução de um problema através de métodos numéricos. Soluções altamente precisas podem ser encontradas, mas somente através do uso de um vasto recurso computacional e extenso gasto de tempo, o que pode não ser interessante e necessário, quando se quer obter um número alto de soluções num relativo baixo espaço de tempo, o que acontece normalmente nas indústrias.

6.2 Princípio do Método dos Elementos Finitos

A idéia principal do método dos elementos finitos, quando aplicado a análise estrutural, está na descrição da deformação de um corpo rígido através da discretização do domínio analisado e não através de um campo de deformações (soluções fechadas para as equações diferenciais). O domínio a ser analisado, aqui designado por Ω é na prática discretizado em pequenos elementos Ω_e , que são ligados aos elementos vizinhos através de nós (Figura 6.1).

Contrariamente às soluções analíticas, são encontradas soluções para as grandezas procuradas (deslocamentos, tensões, etc) somente para os nós da estrutura. Para os outros pontos do domínio Ω são definidas soluções aproximadas, através da utilização de funções de forma, que podem ser mais comumente lineares ou parabólicas, dependendo dos fenômenos que se deseja representar com o modelo de elementos finitos.

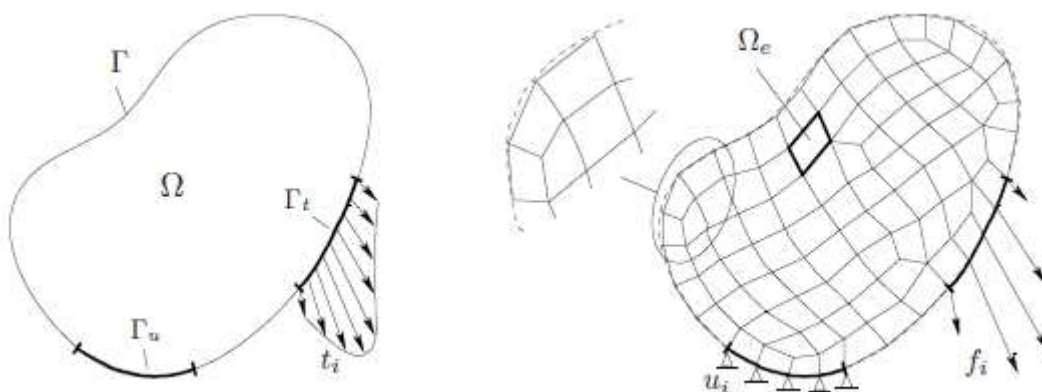


Figura 6.1 - Discretização de um domínio com o uso de elementos finitos

Para uma completa descrição de um chamado problema de valor de contorno é essencial a presença das condições de contorno. Dependendo da natureza da condição de contorno, ela pode ser classificada em:

- *Condições de contorno geométricas:*
São representadas nos problemas de análise estrutural por deslocamentos ou engastamentos de parte do contorno do domínio analisado. Também podem ser chamadas de *condições de contorno de Dirichlet* ou *condições de contorno essencial*;
- *Condições de contorno de tensão:*
São representadas por tensões, forças ou pressões localizadas no contorno do domínio. Elas representam, portanto os carregamentos externos as quais, a estrutura analisada esta submetida. São chamadas

também de *condições de contorno de Neumann* ou *condições de contorno naturais*;

Condições de contorno contínuas como, por exemplo, forças externas aplicadas numa parte do contorno Γ_t ou deslocamentos dados em Γ_u devem ser também discretizadas, durante a abordagem do problema com o MEF.

6.3 Equações Básicas da Mecânica dos Corpos Deformáveis

Do ponto de vista teórico, o método dos elementos finitos pode ser caracterizado como um poderoso método de resolução de equações diferenciais parciais. Para que as bases do MEF se tornem claras é preciso especial atenção ao procedimento de se achar as equações diferenciais que regem o problema, que se tem interesse. Com esta finalidade será considerado como exemplo, somente problemas estáticos, com materiais linear-elásticos e pequenos deslocamentos. Efeitos de segunda ordem como não-linearidades não serão a princípio tratados nesta introdução.

Com o intuito de demonstrar como as equações que regem o problema podem ser determinadas, será utilizado como exemplo uma estrutura modelo. Para isso é preciso especial atenção às seguintes equações:

- Equações de Equilíbrio;
- Relações cinemáticas, que fornecem uma dependência entre os deslocamentos e deformações;
- Relações constitutivas (lei do material em questão);

As equações básicas da mecânica das estruturas serão apresentadas a seguir para o exemplo simples de uma barra sujeita a um carregamento ao longo de seu eixo longitudinal. O material barra apresenta comportamento elástico-linear. A

barra em sua extremidade superior encontra-se engastada e é carregada por uma força na extremidade oposta. Como único grau de liberdade se apresenta o descolamento u na direção longitudinal da barra (Figura 6.2).

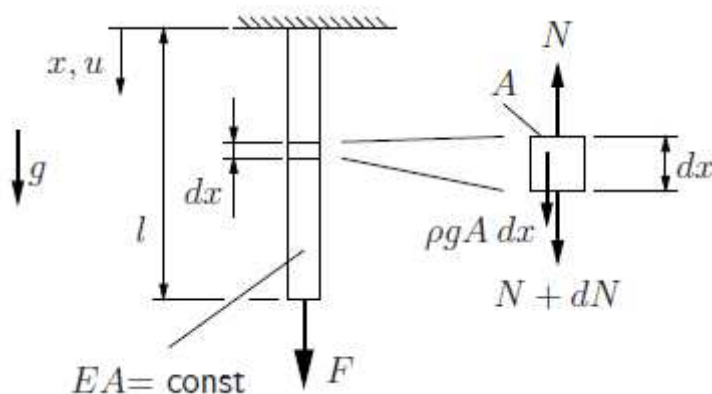


Figura 6.2 - Barra de tração sujeita aos carregamentos de peso próprio e força externa

A condição de equilíbrio estático de um pedaço infinitesimal de barra fornece:

$$N + dN + \rho A g dx - N = 0 \quad (6.1)$$

onde N descreve a força normal na barra, ρ sua densidade, g a aceleração da gravidade, A sua área da secção transversal e x a coordenada na direção longitudinal. Após pequenas manipulações algébricas, obtém-se para uma barra de secção transversal constante e material isotrópico:

$$\frac{dN}{dx} + \rho A g = 0 \quad (6.2)$$

A relação entre os deslocamentos e deformações é chamada de relação cinemática. Para a barra em questão, calcula-se as deformações através da derivada dos deslocamentos:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (6.3)$$

Como foi assumido se tratar de um material elástico linear, a relação constitutiva é representada na forma da *Lei de Hooke*, na qual a deformação na direção longitudinal da barra é diretamente proporcional a tensão nesta direção:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6.4)$$

onde E representa o módulo de elasticidade do material da barra. Adicionalmente a tensão normal pode ser escrita em termos da força longitudinal F : $\sigma = F/A$.

Para a completa descrição do problema é necessário a consideração das condições de contorno. O engastamento na parte superior da barra representa a *condição de contorno essencial* ou *condição de contorno de Dirichlet*, enquanto a força F na parte inferior, a *condição de contorno de Neumann* ou *condição de contorno natural*.

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \rightarrow \text{Engaste} \\ N(l) &= F \text{ ou } \sigma(l) = \frac{F}{A} \rightarrow \text{Força Externa} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Substituindo a definição da tensão normal na equação (6.2), obtém-se a equação diferencial para a tensão normal ao longo da barra:

$$A \frac{d\sigma}{dx} + \rho Ag = 0. \quad (6.6)$$

Com a utilização das relações cinemáticas e constitutivas - equações (6.3) e (6.4), obtém-se finalmente a equação diferencial para os deslocamentos procurados:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho Ag = 0, \quad (6.7)$$

considerando uma área de secção transversal constante e material isotrópico. Juntamente com as condições de contorno (6.5), os deslocamentos u em função da coordenada x podem ser encontrados.

6.4 Forma Fraca da Equação Diferencial

A solução analítica para a equação diferencial do problema explorado no item anterior somente é possível somente para algumas condições de contorno. Para resolver problemas mais complexos, encontrar a solução analítica torna-se impraticável e faz-se necessário utilizar métodos que aproximem a solução. Um poderoso método é representado pelo MEF. O MEF é aplicado à resolução de equações diferenciais, através da chamada *forma fraca de uma equação diferencial*.

Os próximos parágrafos descrevem primeiramente o *método dos resíduos ponderados* e a seguir introduzem a idéia de forma fraca de uma equação diferencial através do *método de Galerkin* e alternativamente através do *princípio dos deslocamentos virtuais*. Na apresentação destes métodos, é utilizada como exemplo, a estrutura discutida no item anterior e apresentada na Figura 6.2.

6.4.1 Método dos Resíduos Ponderados

Seja uma aproximação da função $u(x)$, representante do deslocamento pontual da barra em sua direção longitudinal:

$$u(x) \approx \tilde{u}(x). \quad (6.8)$$

Substituindo esta aproximação na equação diferencial (6.7) da barra, obtém-se a expressão:

$$EA \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \rho Ag = R \quad (6.9)$$

onde R é designado *Resíduo*, devido a proximidade da solução proposta com a solução correta. Somente quando $u(x)$ for exatamente igual à $\tilde{u}(x)$ o resíduo é igual a zero. Ao construir uma expressão para $\tilde{u}(x)$ é normalmente utilizado uma *aproximação de Ritz*, que assume que a solução exata pode ser descrita como uma combinação linear da forma:

$$\tilde{u}(x) = f_{\Gamma}(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i \quad (6.10)$$

sendo $f_i(x)$, funções de aproximação linearmente independentes e a_i , coeficientes constantes. Especialmente importantes são as funções de aproximação, que são arbitrárias. Elas devem apenas satisfazer as condições de contorno essenciais. Isso significa que as funções de aproximação devem ser iguais a zero em todo o contorno do domínio, onde os deslocamentos são dados. A função $f_{\Gamma}(x)$ deve satisfazer desta maneira, a condição que a *condição de contorno de Dirichlet* estabelece.

A condição que a equação diferencial deve ser satisfazer para resolução do problema é:

$$\int_0^l w_i R dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.11)$$

onde as funções arbitrárias $w_i(x)$ são denominadas funções de forma. Considerando que a integral definida de um produto de funções representa o cálculo de um produto escalar, pode-se interpretar esta condição com uma projeção do resíduo R num subespaço gerado pelas funções de forma arbitrárias, de modo que esta projeção seja zero.

6.4.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin é um caso particular do método dos resíduos ponderados, no qual as funções de forma $w_i(x)$ são também utilizadas para aproximar a função $\tilde{u}(x)$, ou seja, as funções aproximadoras $f_i(x)$ correspondem às funções de forma. Este procedimento serve de ponto de partida para se mostrar as bases do MEF.

Portanto para a aproximação da função $u(x)$ através do *Método de Galerkin*, é utilizada a seguinte *aproximação de Ritz*:

$$\tilde{u}(x) \approx u(x) = f_{\Gamma}(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i \quad (6.12)$$

$$w_i(x) = f_i(x) \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

Aqui são ainda a_i , constantes desconhecidas para os deslocamentos. O termo $f_{\Gamma}(x)$ satisfaz as *condições de contorno de Dirichlet* no contorno Γ (aqui sendo representadas pelos deslocamentos dados no contorno). As funções de forma $w_i(x)$, assim como no método dos resíduos ponderados, devem satisfazer as mesmas exigências para as funções aproximadoras $f_i(x)$. Ou seja, devem ser nulas, em todo o contorno, onde os deslocamentos forem dados.

6.4.3 Forma Fraca da Equação Diferencial pelo Método de Galerkin

Utilizando-se a expressão (6.11), juntamente com a definição do resíduo (6.12) de acordo com o método de Galerkin, obtém-se:

$$\int_0^l wEA \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} dx + \int_0^l w \rho Ag dx = 0 \quad (6.13)$$

pode-se integrar por partes. Após rearranjar os termos, obtém-se a chamada *forma fraca da equação diferencial* da barra (6.14):

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{d\tilde{u}}{dx} dx - \int_0^l w \rho Ag dx - \left[wEA \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^l = 0 \quad (6.14)$$

Ela possui este nome, devido aos menores requisitos exigidos para a função $u(x)$, quanto a sua derivabilidade.

Para que o problema seja totalmente descrito, é preciso que as condições de contorno sejam consideradas. Para o exemplo da barra de tração sujeita aos carregamentos de peso-próprio e força externa (Figura 6.2), pode-se escrever para o último termo da equação (6.14):

$$\left[wEA \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^l = w(l)EA \frac{d\tilde{u}(l)}{dx} - w(0)EA \frac{d\tilde{u}(0)}{dx}$$

$$1^\circ \text{ Termo: } w(l)EA \frac{d\tilde{u}(l)}{dx} = w(l)EA\varepsilon(l) = w(l)A\sigma(l) = w(l)F|_l \quad (6.15)$$

2º Termo: Condição para escolha da função de forma $w(x)$:

$$\text{Engastamento em } x = 0 : \tilde{u}(0) = 0 \rightarrow w(0) = 0$$

Considerando as condições de contorno, a forma fraca da equação diferencial da barra pode ser rescrita como:

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} EA \frac{d\tilde{u}}{dx} dx - \int_0^l w \rho A g dx - [wF]|_l = 0 \quad (6.16)$$

6.4.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Um procedimento alternativo para formulação do problema pode ser descrita com a utilização do chamado princípio dos trabalhos virtuais (PTV). O princípio consiste na colocação de *forças virtuais* no sistema que se quer analisar e partir disto, através de uma análise energética, obter a forma fraca da equação diferencial

que o rege. Do ponto de vista prático, o princípio dos trabalhos virtuais pode ser utilizado aqui, como uma forma alternativa de se estabelecer as condições de equilíbrio do sistema.

No exemplo da barra contida na Figura 6.3, o trabalho W_a de uma força externa F deve ser calculado. Após o carregamento da força F , obtém-se um deslocamento u na extremidade inferior da barra. O carregamento deve ser aplicado de forma quase-estático e efeitos dinâmicos não serão nesta etapa considerados.

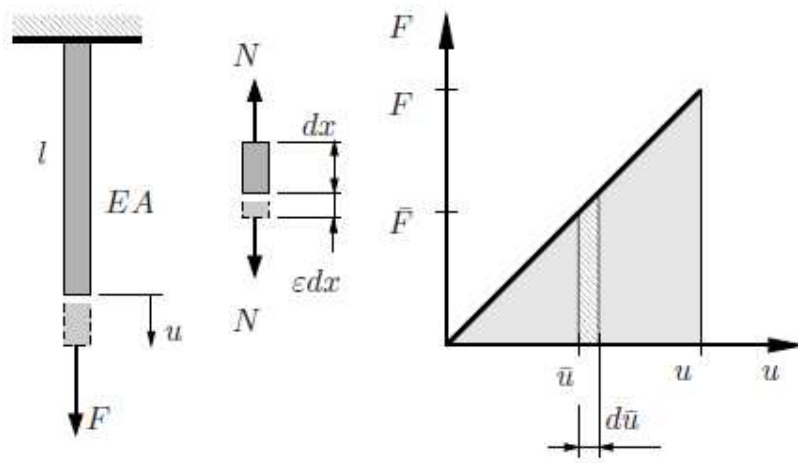


Figura 6.3 - Carregamento quase-estático da barra

Através do deslocamento da extremidade inferior da barra do estado não-deformado para o deformado, a força F produz o trabalho $W_{F_{ext}}$:

$$W_{F_{ext}} = \int_0^u \bar{F} d\bar{u} = \frac{1}{2} Fu. \quad (6.17)$$

Utilizando-se das relações constitutiva e cinemática, obtém-se uma relação entre a força aplicada e o deslocamento obtido: $\bar{F} = \frac{EA}{l} \bar{u}$ ou $\bar{u} = \frac{\bar{F} l}{EA}$. É admitido que a força F

seja conservativa, ou seja independente do lugar e do histórico do carregamento e que sua aplicação seja sempre paralela ao deslocamento.

O carregamento de peso próprio da barra pode ser interpretado como um carregamento distribuído de valor $n = \rho Ag$. Considerando uma porção infinitesimal de um elemento de barra, pode-se calcular o trabalho da força peso (força externa) por unidade de comprimento:

$$W_{P_{ext}}^* = \int_0^u \bar{n} d\bar{u} = \frac{1}{2} n u, \quad (6.18)$$

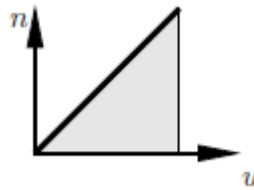


Figura 6.4 - Trabalho da força peso para um elemento infinitesimal de barra

assim, o trabalho da força peso para toda a barra $W_{P_{ext}}$, pode ser escrito como:

$$W_{P_{ext}} = \int_0^l W_{P_{ext}} dx = \frac{1}{2} \int_0^l n u dx. \quad (6.19)$$

O trabalho de deformação W_{int} descreve o trabalho das forças internas, que é realizado na deformação do sistema analisado. Um procedimento semelhante pode ser adotado, considerando uma relação linear entre força e a pertencente grandeza de deformação. Isto significa que para um pequeno elemento da barra, a força normal cresce linearmente em função da deformação, durante a aplicação da força externa F .

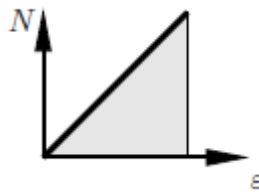


Figura 6.5 - Trabalho das forças internas para um elemento infinitesimal de barra

Pode-se escrever que o trabalho da força normal, considerando o elemento infinitesimal de barra é $dW_{int} = \frac{1}{2}N\varepsilon dx = W_{int}^*$. Com isso, é possível obter-se a expressão para o trabalho total das forças internas:

$$W_{int} = \int_0^l dW_{int} = \frac{1}{2} \int_0^l N\varepsilon dx \quad (6.20)$$

Para um sistema fechado é possível afirmar que o trabalho das forças externas é igual ao trabalho das forças internas (energia acumulada pelo sistema), o que para o exemplo da barra submetida somente a ação de seu peso próprio, pode ser escrito:

$$W_{int} - W_{ext} = \frac{1}{2} \int_0^l N\varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_0^l n u dx = 0 \quad (6.21)$$

Vale ressaltar que esta relação, conhecida como teorema do trabalho, é válida independente da relação constitutiva que se está trabalhando, ou seja, independentemente do material utilizado.

A seguir, para se explicar o conceito de trabalho virtual, o carregamento é aplicado à estrutura em 2 etapas. Considerando a estrutura submetida somente ao seu peso próprio, tem-se que na primeira etapa a estrutura é carregada até um estado de deformação representado pelo deslocamento $u(x)$. Na segunda etapa, é aplicada uma deformação incremental $\delta u(x)$ (também chamada de virtual, pelo fato de ser suficientemente pequena quanto se queira), que irá causar no sistema variações, também incrementais, nas grandezas como deformações $\delta \varepsilon$, força normal δN , etc.

Utilizando-se o que foi deduzido na seção anterior, tem-se que a soma dos trabalhos das forças internas e externas deve ser igual ao trabalho total necessário para deformar a estrutura ao estado $u(x) + \delta u(x)$. Desta forma, os trabalhos das forças internas e externas são divididos de acordo com a Figura 6.6.

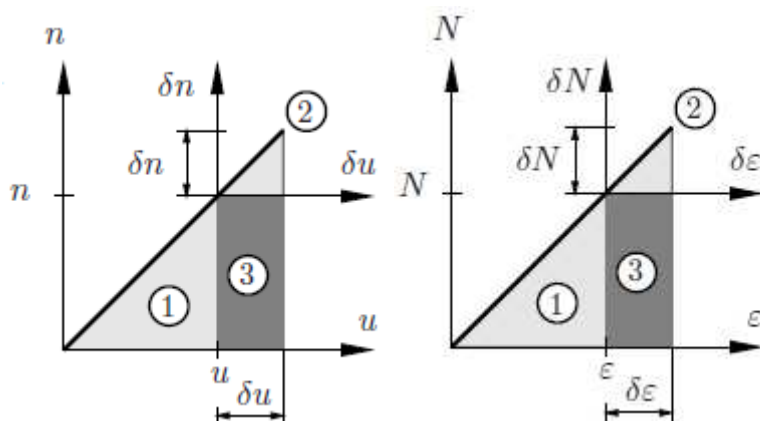


Figura 6.6 - (a) Trabalho das forças externas (força peso) , (b) Trabalho das forças internas

O trabalho das forças externas W_{ext} pode ser determinado através da integração do trabalho externo por unidade de comprimento:

$$W_{ext} = \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2} n u \, dx}_1 + \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2} \delta n \, \delta u \, dx}_2 + \underbrace{\int_0^l n \, \delta u \, dx}_3 \quad (6.22)$$

Dessa forma análoga, o trabalho interno por unidade de comprimento, pode ser expresso por:

$$W_{int}^* = \underbrace{\frac{1}{2} N \varepsilon}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \delta N \, \delta \varepsilon}_2 + \underbrace{N \, \delta \varepsilon}_3, \quad (6.23)$$

o que resulta, no trabalho interno total, através de integração:

$$W_{int} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l N \varepsilon \, dx}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l \delta N \, \delta \varepsilon \, dx}_2 + \underbrace{\int_0^l N \, \delta \varepsilon \, dx}_3 \quad (6.24)$$

Como visto anteriormente, o trabalho total das forças internas deve ser igual ao trabalho total das forças externas ($W_{int} - W_{ext} = 0$). Reescrevendo os termos, tem-se: (6.25)

$$\begin{aligned}
W_{int} - W_{ext} = & \quad \frac{1}{2} \int_0^l N \varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_0^l n u dx & \} \mathbf{1} \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \delta N \delta \varepsilon dx - \int_0^l \frac{1}{2} \delta n \delta u dx & \} \mathbf{2} \\
& + \int_0^l N \delta \varepsilon dx - \int_0^l n \delta u dx & \} \mathbf{3}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

As parcelas **1**, **2** e **3** da expressão resultante do teorema do trabalho, podem ser interpretadas como descrito a seguir:

1 – Trabalho interno e externo correspondente a aplicação quase-estática do carregamento e responsável pelo deslocamento da barra ao estado $u(x)$;

2 – Trabalho dos carregamentos virtuais internos e externos, que originam os deslocamentos e deformações virtuais (análogo a **1**);

3 – Energia interna virtual $(\int_0^l N \delta \varepsilon dx)$ e trabalho dos deslocamentos virtuais $(\int_0^l n \delta u dx)$.

Recorrendo ao teorema do trabalho (6.21), obtém-se que os termos **1** e **2** devem ser igualmente nulos. Com isso permanecem na expressão, somente a energia interna virtual das deformações virtuais das forças normais e o trabalho dos deslocamentos virtuais das deformações virtuais dos carregamentos externos, concluindo-se a validade de:

$$\int_0^l N \delta \varepsilon dx - \int_0^l n \delta u dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.27)$$

Em outras palavras um sistema está em equilíbrio, quando o trabalho virtual dos deslocamentos virtuais das forças existentes é nulo.

Finalmente, na Tabela 6.1 é possível encontrar uma rápida comparação entre as 2 abordagens apresentadas de se obter a forma fraca de uma equação diferencial. Vale ressaltar que para que as duas abordagens possam produzir o mesmo resultado também é preciso que os deslocamentos virtuais satisfaçam as condições de contorno essenciais do problema (ver item 6.3).

Tabela 6.1 - Comparação entre o Método de Galerkin e o Princípio dos Trabalhos Virtuais

Método de Galerkin	Princípio dos Trabalhos Virtuais
Método dos Resíduos Ponderados + Forma Fraca + Condição de Galerkin para as funções aproximadoras	Trabalhos Virtuais
Tratamento matemático, Manipulação de uma equação diferencial	Procedimento baseado em considerações energéticas

Considerando que a deformação virtual $\delta \varepsilon$, pode ser escrita da seguinte maneira: $\delta u_{,x}$, reescreve-se a equação (6.27):

$$\int_0^l N \delta u_{,x} dx - \int_0^l n \delta u dx = 0 \quad (6.28)$$

Integrando por partes, obtém-se:

$$[N\delta u]_0^l - \int_0^l N_{,x} \delta u \, dx - \int_0^l n \delta u \, dx = 0 \quad (6.29)$$

Considerando o problema da barra submetida somente ao seu peso próprio, com as seguintes condições de contorno:

$$\delta u(0) = 0 \text{ e } N(l) = 0, \quad (6.30)$$

tem-se que o primeiro termo da equação (6.29) deve ser zero. O resultado pode ser resumido na seguinte integral:

$$\int_0^l (N_{,x} + n) \delta u \, dx = 0 \quad (6.31)$$

Com a expressão (6.31), pode-se ver o resultado já obtido anteriormente através do método de Galerkin. Nesta expressão o deslocamento virtual δu representa, de forma análoga, as funções de forma, enquanto que $N_{,x} + n$, o resíduo. Sendo $n = \rho Ag$, o carregamento de peso próprio da barra, a expressão (6.31), representa, portanto uma forma alternativa de estabelecer o equilíbrio na barra.

A equação (6.31) pode ser rescrita usando as informações que $N = A\sigma = EA\varepsilon = EAu_{,x}$ e $n = \rho Ag$:

$$\int_0^l \delta u_{,x} EA u_{,x} dx + \int_0^l \delta u \rho Ag dx = 0 \quad (6.32)$$

Desconsiderando o carregamento externo F , a equação (6.32) corresponde exatamente a forma fraca da equação diferencial da barra, obtida pelo Método de Galerkin. O deslocamento virtual δu é interpretado, como dito antes, como uma função de forma. Vale ressaltar que para que seja encontrada a forma fraca da equação diferencial pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais é necessário que o deslocamento virtual δu , satisfaça não somente as condições de contorno essenciais, como também seja nulo em todo o contorno do domínio.

7. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Cada vez mais a busca por sistemas, que operem de forma mais eficiente durante sua fabricação, uso e descarte, torna-se foco nos projetos de engenharia. Esta busca se justifica pela imensa intensificação nas ultimas décadas da concorrência nas mais variadas áreas, o que torna um pequeno avanço de desempenho um grande diferencial diante dos concorrentes.

Diante deste contexto, os métodos de otimização se apresentam como ferramentas extremamente poderosas na cadeia de desenvolvimento de um produto para responder perguntas como:

- Como obter o custo mínimo de um produto considerando as restrições de matéria-prima, logística, produção, etc sem interferir nas exigências do cliente?
- Como ampliar o lucro na venda de um produto gastando menos material?
- Como obter características mais convenientes na construção de seu produto de modo a obter um diferencial em sua venda?

De uma maneira mais técnica, estas perguntas podem ser traduzidas para um problema de maximização ou minimização de uma função de uma ou mais variáveis num determinado domínio, normalmente sujeito a um conjunto de restrições nas variáveis. Os métodos de otimização (algoritmos para resolução) visam em geral obter uma configuração ótima (máximo ou mínimo de uma função) para este conjunto de variáveis.

De modo a classificar e tornar o estudo mais fácil, os métodos de otimização podem ser divididos em:

- Otimização Paramétrica;
- Otimização de Forma;
- Otimização Topológica.

A otimização paramétrica procura otimizar a estrutura através da utilização das variáveis de projeto como variáveis do problema de otimização (Figura 7.1). Busca-se então os valores para o conjunto de variáveis de projeto que conduza a estrutura a apresentar um valor máximo ou mínimo de uma certa propriedade.

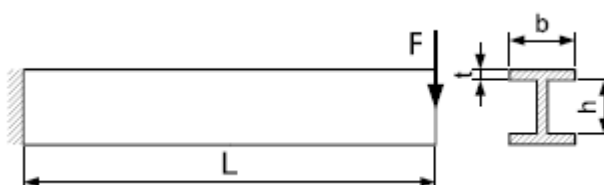


Figura 7.1 - Exemplo de otimização paramétrica [4]

De maneira um pouco mais geral do que a otimização paramétrica, a otimização de forma procura otimizar a estrutura utilizando os parâmetros de curvas “splines” como variáveis do problema de otimização (Figura 7.2). Estas curvas “splines” serão as curvas geradoras dos perfis da estrutura. Embora mais geral que o tipo anterior, métodos de otimização de forma são extremamente dependentes da experiência do construtor, considerando que uma forma próxima da otimização deve ser conhecida, para que possa ser aplicado com sucesso.

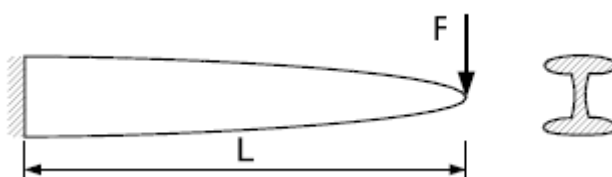


Figura 7.2 - Exemplo de otimização de forma [4]

A otimização topológica se caracteriza como um método de otimização, no qual é possível controlar a disposição de material de uma estrutura limitada por um determinado domínio e sujeita a condições de contorno e carregamentos variados (Figura 7.3). De grande generalidade, a otimização topológica permite, portanto a introdução de buracos no domínio. Para mais informações, ver [5].



Figura 7.3 - Exemplo de otimização topológica [4]

Para estruturas discretas, como a estrutura de treliças analisada neste trabalho, a aplicação do método de otimização topológica alocará as treliças nas regiões do domínio somente onde for necessário, de modo a maximizar ou minimizar a função objetivo, de acordo com a formulação do problema de otimização escolhido (ver 9).

8. ALGORITMOS GENÉTICOS

8.1 Introdução

Como visto na seção 7, todo problema de otimização é descrito tradicionalmente pelos seguintes elementos:

- Espaço de busca;
- Função objetivo;
- Restrições.

O espaço de busca caracteriza para qual domínio das variáveis de projeto que se deseja encontrar a configuração ótima da estrutura estudada. A função objetivo determina qual propriedade que se deseja minimizar ou maximizar. Finalmente, as restrições associadas ao problema de otimização, incluem na formulação a possibilidade de que algumas configurações, mesmo estando dentro do domínio das variáveis de projeto, possam não ser possíveis. Com relação a aplicação de métodos de otimização no projeto de sistemas mecânicos, tais restrições geralmente estão associadas a limites de resistência de material, limitações volumétricas, de matéria-prima, custo, etc.

Com estes elementos principais, em geral, a aplicação de métodos de otimização consiste na aplicação de operações matemáticas iterativas a partir de uma configuração inicial de variáveis de projeto, que possam levar a configurações que maximizam ou minimizam a função objetivo escolhida para o problema que se está analisando.

Por outro lado, com o desenvolvimento acelerado da capacidade computacional no final do século XX, tem se desenvolvido formas alternativas de otimização. Em contrapartida ao procedimento citado acima, as chamadas técnicas de computação evolucionária utilizam ao mesmo tempo informações de várias configurações de variáveis de projeto durante a otimização. Os também chamados algoritmos genéticos são baseados na evolução biológica, a partir da idéia de que durante o processo de otimização, indivíduos mais aptos (configurações de variáveis

de projeto que otimizam a função objetivo) tendem a permanecerem no processo de busca da configuração ótima e desta forma gerarem descendentes, mais aptos.

Inicialmente, o método promove a criação aleatória de uma população inicial de configurações das variáveis de projeto. Cada indivíduo desta população (configuração) é então avaliada segundo sua aptidão com relação a algum critério, por exemplo estabelecido pela função objetivo do problema. A seguir, uma porcentagem dos mais aptos são mantidos na população, enquanto que os menos aptos são descartados. De modo, a reconstruir a população, os indivíduos mantidos podem se reproduzir e gerar descendentes para a próxima geração através de mecanismos de mutação e recombinação genética (crossover). Desta forma, este procedimento é repetido por várias gerações até que se encontre uma solução que otimize a função objetivo do problema.

8.2 Características Gerais

Como visto no item anterior, os algoritmos genéticos é um conjunto de métodos de otimização global, onde ocorre uma busca paralela e aleatória por configurações de variáveis de projeto (indivíduos) de *elevada aptidão* de modo a minimizar ou maximizar a função objetivo do problema. Esta busca, embora aleatória, não é desordenada, pois utilizada informações obtidas nas gerações anteriores de modo a caminhar sempre na direção que possivelmente apresentará configurações com melhor desempenho.

O primeiro passo para a utilização dos algoritmos genéticos é a representação dos valores das variáveis de projeto (fenótipo) de modo que o algoritmo possa ser aplicado (codificação). Isso é geralmente feito através de números binários, de modo que possam ser representados como se fossem os genes dos indivíduos.

Sendo que esta transformação fenótipo-genótipo foi realizada, ou seja, foi possível transformar os valores de um certo número de configurações (população)

de variáveis de projeto em números binários, o método calcula a aptidão relativa de cada indivíduo, de modo a selecionar quais indivíduos serão selecionados (*sobreviverão*) para a próxima geração.

Para permitir que o método possa gerar populações sucessivas durante várias gerações, selecionando indivíduos com melhores aptidão com o tempo é preciso que os genótipo dos indivíduos selecionados (representação binária) passe pelas etapas de *cruzamento* (*crossover*) e *mutação*, etapas estas que representam a reprodução dos indivíduos. Através destas etapas, as características genotípicas dos indivíduos selecionados durante uma geração serão mescladas (Substituição) para a criação de novos indivíduos, mantendo de certa forma características de seus pais.

Este ciclo descrito acima é repetido um certo número de vezes (gerações). Um modelo de algoritmo é descrito na figura Figura 8.1, representando todas as etapas:

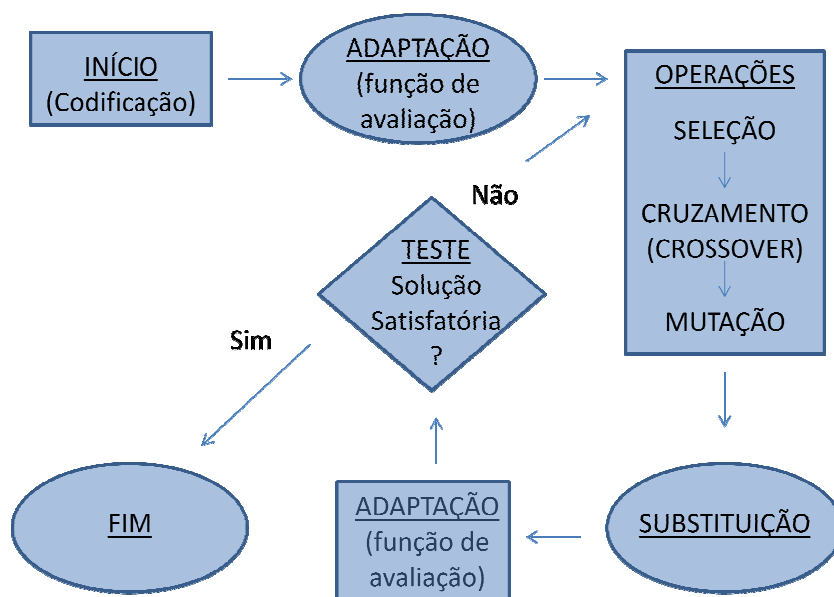


Figura 8.1 - Etapas de um algoritmo genético

8.3 Operadores Genéticos

Os operadores genéticos são responsáveis por transformar a população de indivíduos durante as gerações. Eles são importantes pois ao mesmo tempo transformam a população ao longo das gerações, como também permitem que as características de aptidão dos pais sejam em partes transmitidas aos filhos, permitindo desta forma a migração da população para seres mais aptos.

O operador de mutação permite a alteração aleatória de uma parte do genótipo do indivíduo, permitindo desta maneira que ao longo das gerações não sejam acumulados somente seres com elevada aptidão relativa e consequente promovendo uma diversidade genética da população (Figura 8.2). Do ponto de vista da otimização, o operador de mutação é controlado por uma probabilidade de mutação, que quando calibrado corretamente, evita que a busca por indivíduos mais aptos fique presa num mínimo local. Em contrapartida, taxas elevadas de mutação torna a busca essencialmente aleatória.

Antes da mutação:	1 1 1 0 0
Depois da mutação:	1 1 0 0 0

Figura 8.2 - Exemplo de mutação

A operação de cruzamento ou crossover é responsável pela combinação das características dos indivíduos selecionados em cada geração e transmissão destas para os descendentes (Figura 8.3). Assim como a mutação, a frequência de ocorrência de crossover é determinada pela probabilidade de crossover. Quanto maior for esta probabilidade, mais rapidamente novos indivíduos serão introduzidos na população e consequentemente maior, será a chance de indivíduos com alta aptidão serem trocados por outros. Quando for baixa, o algoritmo apresentará uma velocidade muito baixa de convergência.

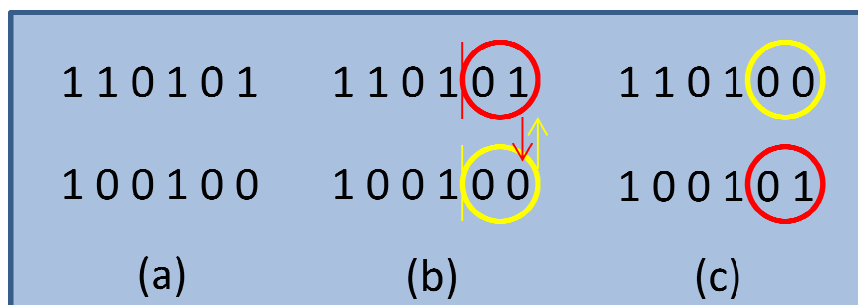


Figura 8.3 - Exemplo de cruzamento (Crossover) (a) dois indivíduos são escolhidos (b) um ponto do gene sofre crossover (c) são re combinadas as características, gerando dois novos indivíduos

8.4 Outros Parâmetros Importantes

Cabe ressaltar, que outros parâmetros como o tamanho da população e o intervalo de geração são igualmente importantes para o sucesso do processo de otimização.

O tamanho da população afeta o desempenho do método, pois a medida que se tem pequenas populações, não se consegue cobrir de maneira eficiente o domínio de busca por indivíduos aptos além de aumentar a chance do método ficar *preso* num mínimo ou máximo local. No entanto, ao se trabalhar com uma elevada população, necessita-se de mais recursos computacionais, além de elevar consideravelmente o tempo de execução do método.

O intervalo de geração representa a porcentagem de população que será substituída para a próxima geração. Uma alta taxa de troca pode fazer com que indivíduos aptos possam ser também substituídos. Da mesma forma, que uma elevada população, uma baixa taxa de troca acaba tornando o método muito lento.

Para mais informações sobre algoritmos genéticos, ver [6] e [7].

9. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A formulação do problema de otimização é a etapa mais importante do processo de se otimizar o comportamento de uma estrutura. Definir o que se quer otimizar e como isso pode ser eficientemente descrito matematicamente através de uma função (função objetivo), assim como qual será o domínio de busca da solução ótima e quais restrições que estão presentes no problema analisado, são características que devem ser observadas.

Como pode ser visto na Figura 9.1, a estrutura analisada neste estudo é um conjunto de treliças visco-elásticas. Para a modelagem da viscoelasticidade das treliças, foi utilizado o modelo simplificado de Kelvin-Voigt (ver 5.2), onde se o fenômeno da viscoelasticidade é modelado através da colocação de elementos de treliças em paralelo com elementos dissipativos (amortecedores).

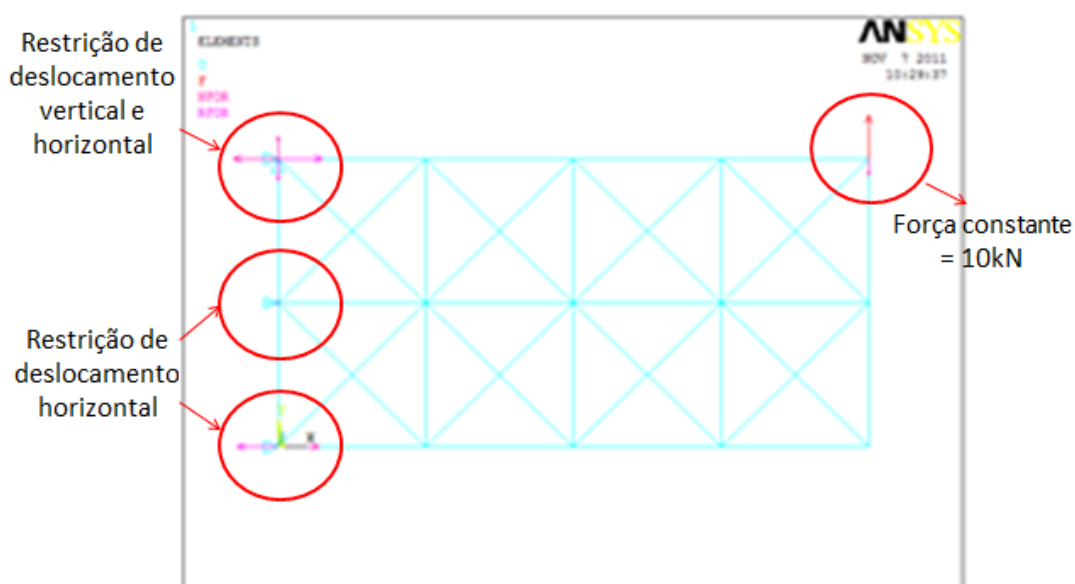


Figura 9.1 - Estrutura de treliças analisada

Visto que se deseja otimizar o comportamento dinâmico que a estrutura da Figura 9.1 apresenta, ou seja, deseja-se com a utilização do fenômeno da viscoelasticidade, reduzir não somente o aparecimento de elevados deslocamentos como também um eficiente amortecimento destes, a medida que a estrutura é submetida a cargas dinâmicas. Por este motivo, escolheu-se, como um medidor deste comportamento e consequentemente como função objetivo do problema, a integral da curva de deslocamento do nó onde foi aplicada a força constante (até o instante de tempo $t = 0.2s$).

Como variáveis de projeto foram utilizadas os valores das áreas das seções transversais das barras de treliça. De modo a isolar os efeitos elástico e dissipativo (ação de amortecedores) na estrutura, foram consideradas 2 variáveis de projeto (áreas) diferentes para um mesmo elemento. Uma responsável pela porção do elemento que proporciona à estrutura o efeito elástico e a outra responsável pelo efeito dissipativo. Ao final, a área total do elemento será dada pela soma destas duas áreas.

Para que a análise da estrutura fique enriquecida e para que, com a aplicação do método de otimização, a busca pela solução ótima não se direcione para os extremos do domínio, foi considerado também uma restrição associada ao volume total de treliças presentes em cada configuração em comparação com um volume total máximo de referência.

$$f = \frac{\sum_{i=0}^N V_i}{\sum_{i=0}^N V_{i_{max}}} \quad (9.1)$$

Este volume total máximo foi definido a partir das áreas máximas das seções, presentes no extremo do domínio considerado. Desta forma é possível, criar um parâmetro f ($0 < f < 1$), que medirá uma diminuição de volume de uma configuração, com relação a uma configuração de referência (que possui volume máximo, de acordo como domínio escolhido para resolução do problema). Em (9.1), o índice N , representa o número de barras de treliça da estrutura.

Desta forma é possível resumir o problema de otimização como:

$$\min \int_0^{0.2} u(t) dt \quad (9.2)$$

tal que

$$f < f^*$$

$$10^{-6}m^2 < (A_k)_i < 4.10^{-4}m^2$$

$$10^{-6}m^2 < (A_c)_i < 4.10^{-4}m^2$$

onde $u(t)$ representa o deslocamento em função do tempo do nó onde a força constante é aplicada, f é a fração relativa de volume como definida em (9.1), f^* é uma fração de volume de referência para a otimização. A segunda e terceira restrição consideradas representam respectivamente a definição do domínio de busca das áreas das barras relacionadas ao efeito elástico e viscoso da estrutura.

10. RESULTADOS

De modo a realizar a otimização da estrutura de treliças descrita na seção anterior, foi inicialmente programado um solver em Matlab capaz de calcular o comportamento dinâmico de estruturas de treliças submetidas a carregamentos dinâmicos. Para isso foi utilizado conceitos do método dos elementos finitos. Para a modelagem das treliças, foi utilizado elementos planos com 4 graus de liberdade (Figura 10.1). A integração numérica das equações diferenciais de movimento foi realizada através da aplicação do método de Newmark-beta (para mais informações ver [5]).

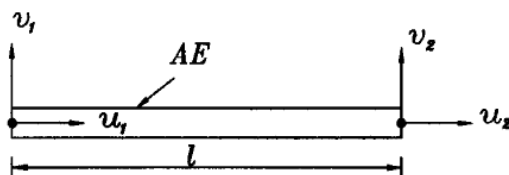


Figura 10.1 - Elemento com 4 graus de liberdade [6]

10.1 Validação

De modo a validar os resultados obtidos com o solver desenvolvido em Matlab, foi simulado no solver assim como no programa Ansys uma estrutura simples composta de 2 barras visco-elásticas (Figura 10.2). À estrutura é aplicada uma força de tração de 100N.

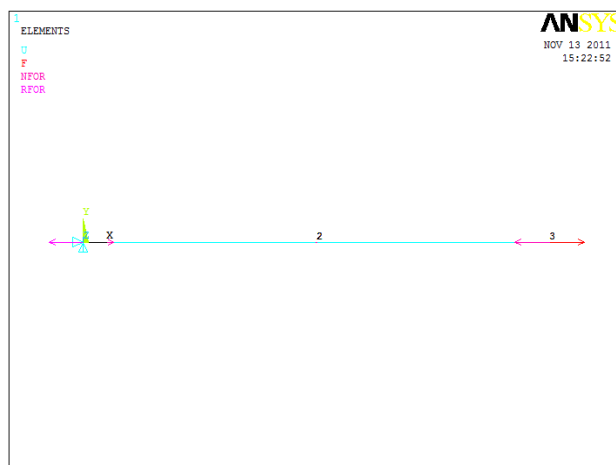


Figura 10.2 - Estrutura com 2 barras visco-elásticas

Assim como explicado anteriormente, o fenômeno da viscoelasticidade foi modelado no Ansys através do elemento COMBIN14, que permite a introdução de elementos de amortecimento na estrutura. Para esta simulação foram utilizadas barras de treliças unitárias com as propriedades presentes na Tabela 10.1. A seguir, pode ser visto os resultados obtidos com os dois softwares (Figura 10.3 e Figura 10.4)

Tabela 10.1 - Propriedades utilizadas na simulação

$\Delta t = 0.01s$ (tempo total de simulação)	$dt = 10^{-5}s$ (time-step)
$E = 200GPa$ (módulo de elasticidade)	$A_i = \pi(0.005^2)$ (área das barras de treliças)
$\rho = 7860 \frac{kg}{m^3}$ (densidade)	$\eta = 10^6 \frac{Ns}{m^2}$ (viscosidade dinâmica)

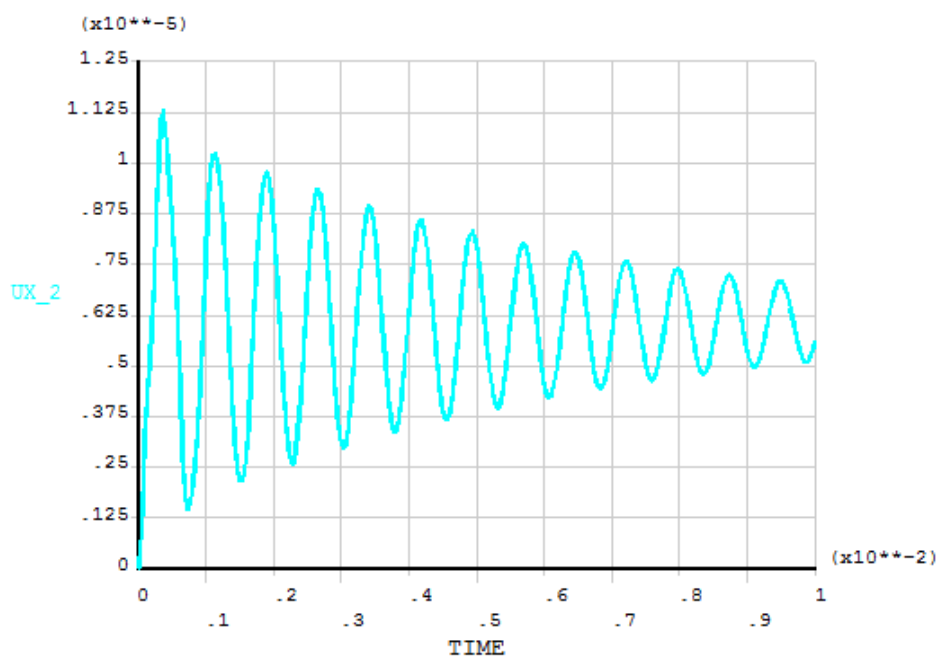


Figura 10.3 - Resultados obtidos com o solver desenvolvido com o Ansys

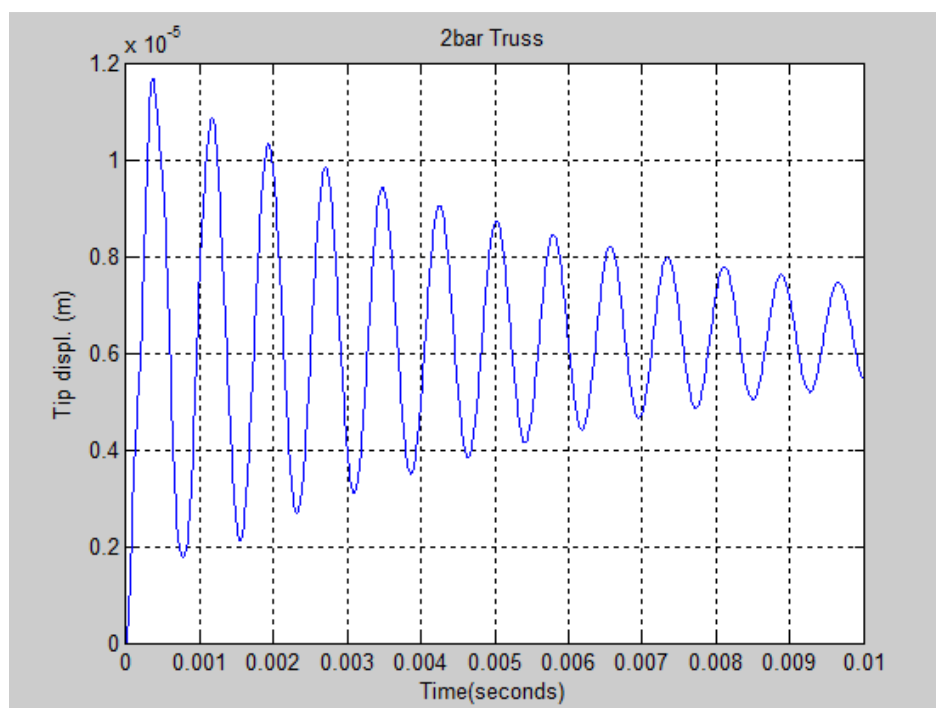


Figura 10.4 - Resultados obtidos com o solver desenvolvido em Matlab

Comparando os gráficos apresentados na Figura 10.3 e Figura 10.4, conclui-se que os resultados obtidos através do solver desenvolvido em Matlab estão de acordo com os obtidos com o programa comercial Ansys.

10.2 Otimização

Uma vez confirmado, que o solver desenvolvido em Matlab fornece resultados coerentes para análise de estruturas de treliças quando comparados com o software comercial Ansys, iniciou-se de fato o processo de otimização da estrutura, presente na Figura 4.1, que apresenta um total de 38 elementos, de acordo com a modelagem da Figura 10.1 e com propriedades dadas pela Tabela 10.1.

Para isso, como foi explicado nas seções anteriores deste trabalho, utilizou-se o programa ModeFrontier, que permite a integração de várias plataformas de desenvolvimento de produtos (para mais informações ver 4) para aplicação de técnicas de otimização. No programa ModeFrontier foi definida a função objetivo, a restrição associada ao volume da estrutura, como também o domínio de busca para as áreas das treliças, através de um workflow que integrava as atividades de otimização com as do solver implementado em Matlab. Para a busca da solução ótima foi utilizado algoritmos genéticos já implementados no ModeFrontier. Seu modo de operação consistiu na chamada sucessiva do matlab (solver) que calculava o comportamento dinâmico da estrutura e o valor da função objetivo para um certo número de configurações de áreas (geração). Ao final de cada geração, os algoritmos genéticos (para mais informações ver 8) selecionavam as configurações mais aptas (que neste caso minimizavam de forma mais eficiente a função objetivo do problema). Estas forneciam, através de operações de cruzamento (crossover) e mutação, novos indivíduos. Este passo é repetido por várias gerações, até que o método de otimização se direciona a fornecer configurações de áreas que minimizem dentro do domínio de busca a função objetivo escolhida.

Para observação dos resultados, foram analisados três casos:

1. $f^* = 0.7$ (solução ótima: $f = 0.6975$);
2. $f^* = 0.5$ (solução ótima: $f = 0.4513$);
3. $f^* = 0.20$ (solução ótima: $f = 0.1975$).

Em cada um deles, foi verificado como se variava o comportamento da solução ótima a medida que a quantidade de material permitida na estrutura era alterada. (alteração da fração de volume de referência - f^*).

Os seguintes parâmetros referentes aos algoritmos genéticos foram utilizados:

Tabela 10.2 - Parâmetros dos algoritmos genéticos

População N=160	Probabilidade Crossover $P_{cr} = 0.5$
	Probabilidade Seleção $P_{sel} = 0.05$
Número de gerações g=10	Probabilidade de Mutação $P_{mut} = 0.1$

Nas figuras a seguir, foi plotado, para os três casos analisados, o deslocamento (estrutura otimizada em cor vermelha) do nó onde a força constante de 100N foi aplicada em comparação com o deslocamento do nó de uma estrutura de referência (plotado em cor preta), a qual possui áreas das barras igual a $2 \cdot 10^{-4} m^2$ (correspondente a área média dos valores extremos do domínio de busca: $1 \cdot 10^{-6} m^2$ e $4 \cdot 10^{-4} m^2$).

É plotado em seguida o valor da energia associada ao deslocamento do nó para a estrutura de referência e estrutura otimizada, explicitando que houve uma redução de valor. (Figura 10.5, Figura 10.9 e Figura 10.13).

Finalmente é plotada para cada caso, a contribuição de área dos elementos elásticos (Figura 10.7, Figura 10.11 e Figura 10.15), dissipativos (Figura 10.8, Figura 10.12 e Figura 10.16), como também a soma de ambas, que resulta na estrutura final otimizada (Figura 10.6, Figura 10.10 e Figura 10.14).

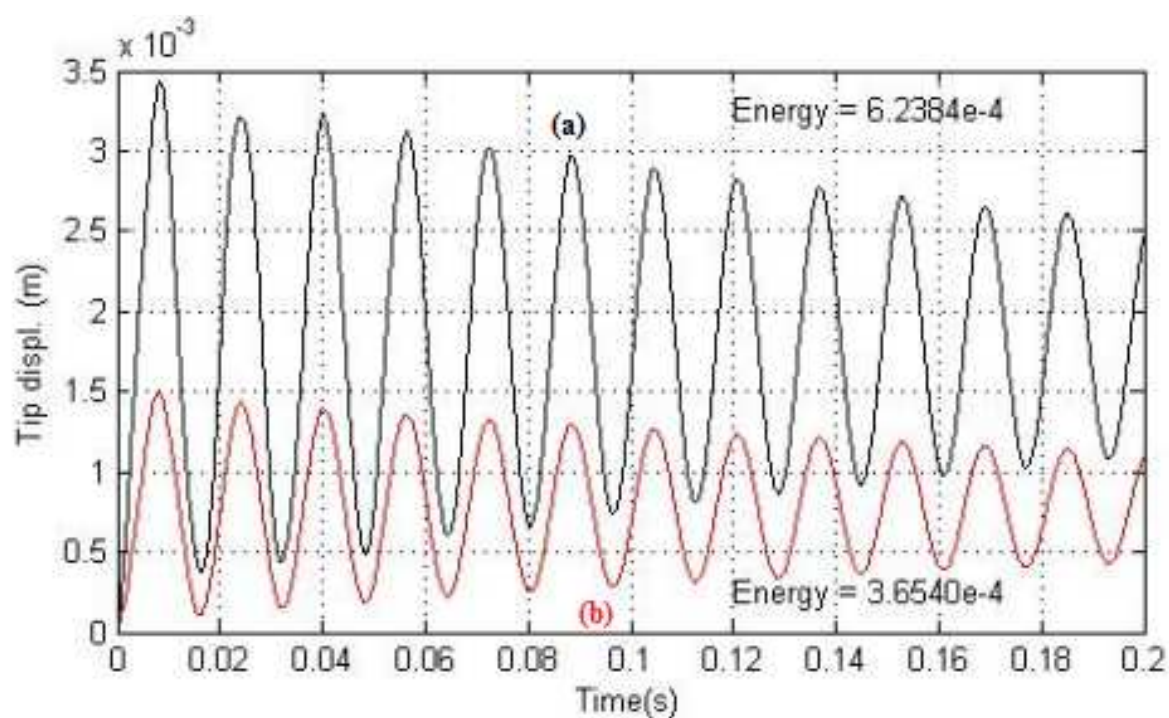


Figura 10.5 - Caso $f = 0.7$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada

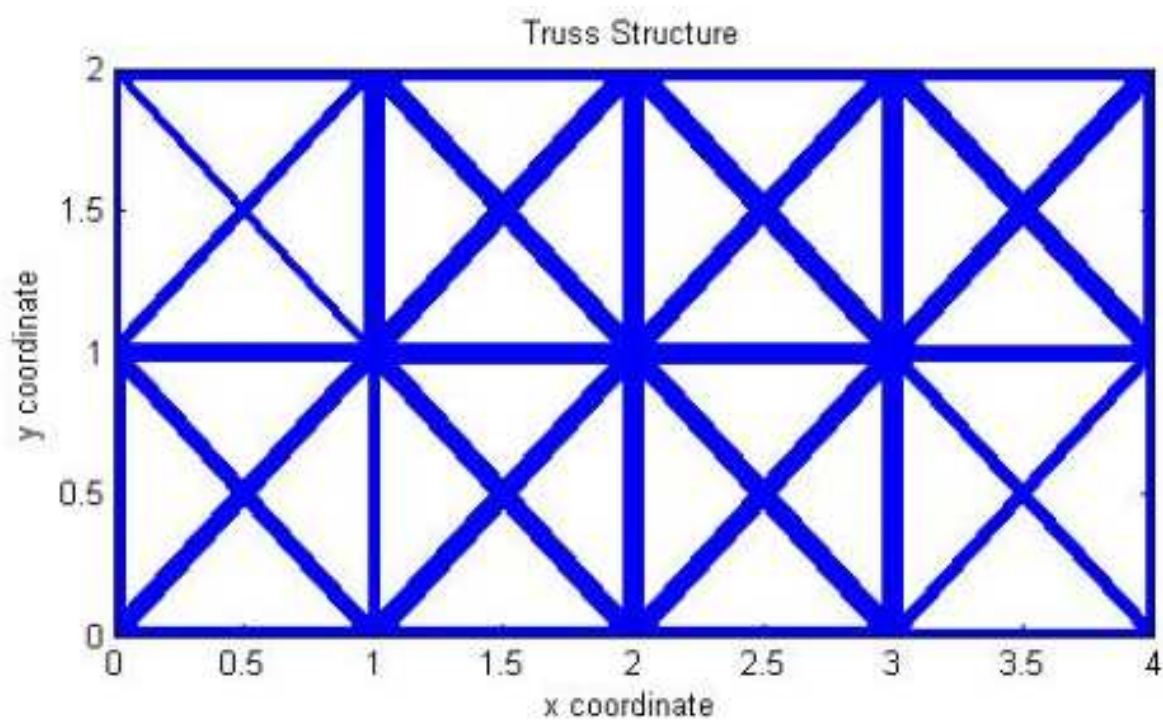


Figura 10.6 - Caso $f = 0.7$ - Estrutura de treliças otimizada

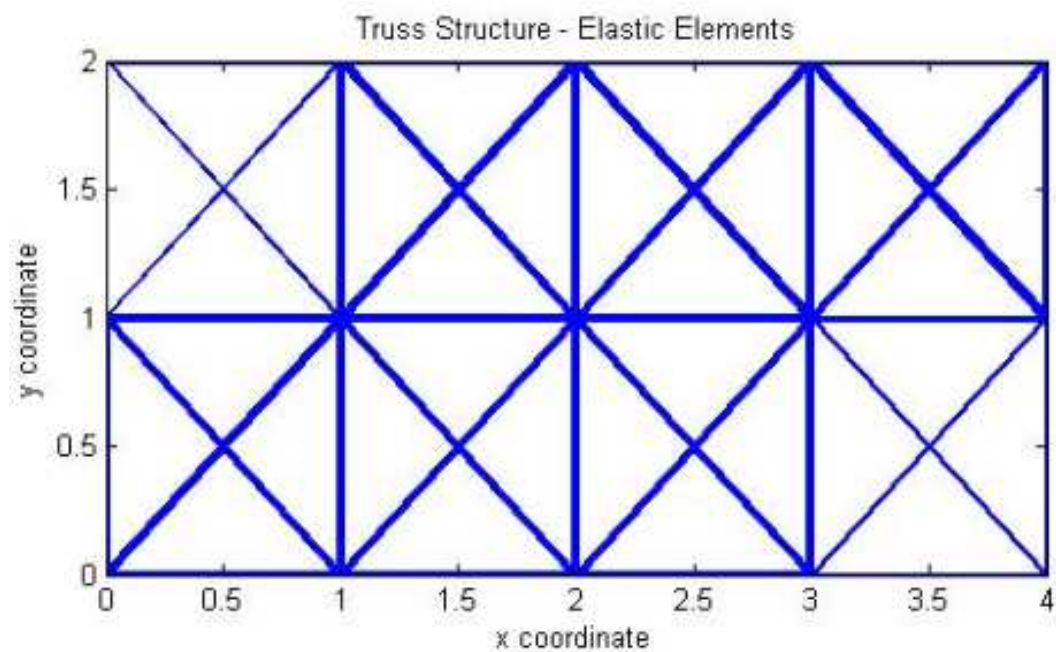


Figura 10.7 - Caso $f = 0.7$ - Distribuição ótima de elementos elásticos

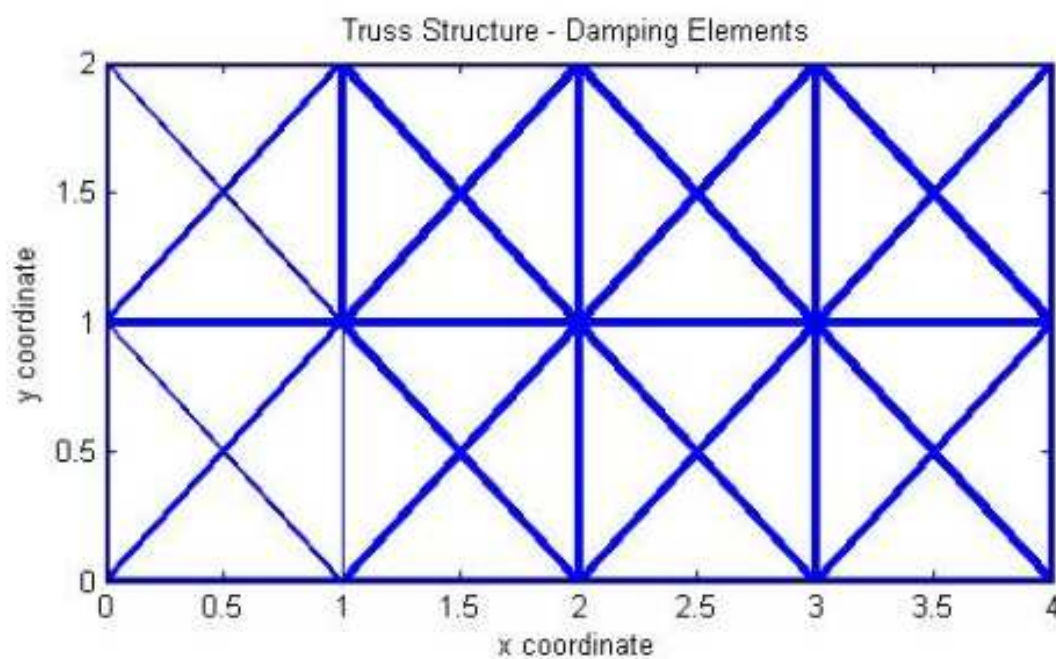


Figura 10.8 - Caso $f = 0.7$ - Distribuição ótima de amortecedores

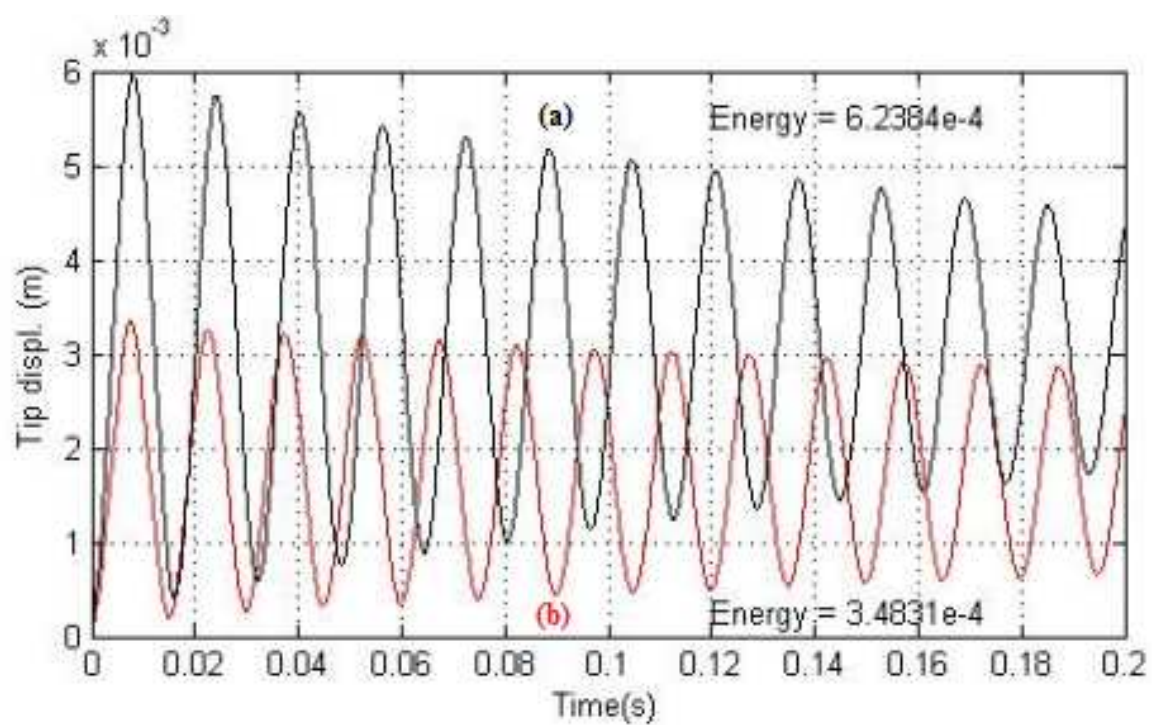


Figura 10.9 - Caso $f = 0.5$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada

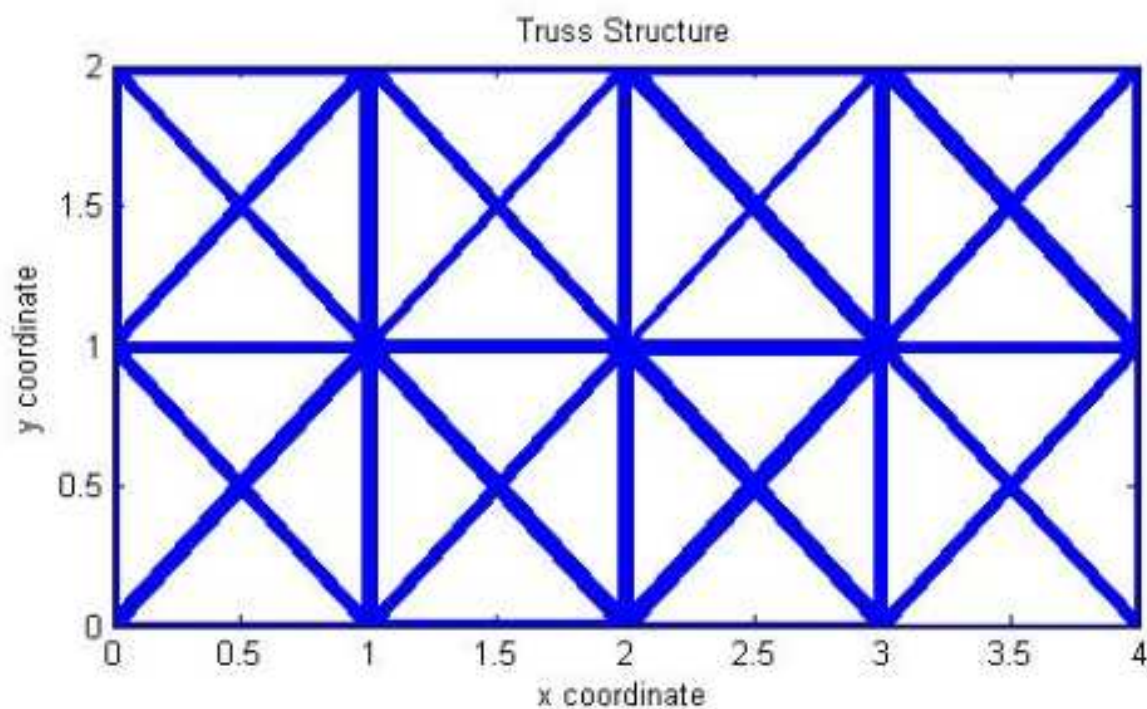


Figura 10.10 - Caso $f = 0.5$ - Estrutura de treliças otimizada

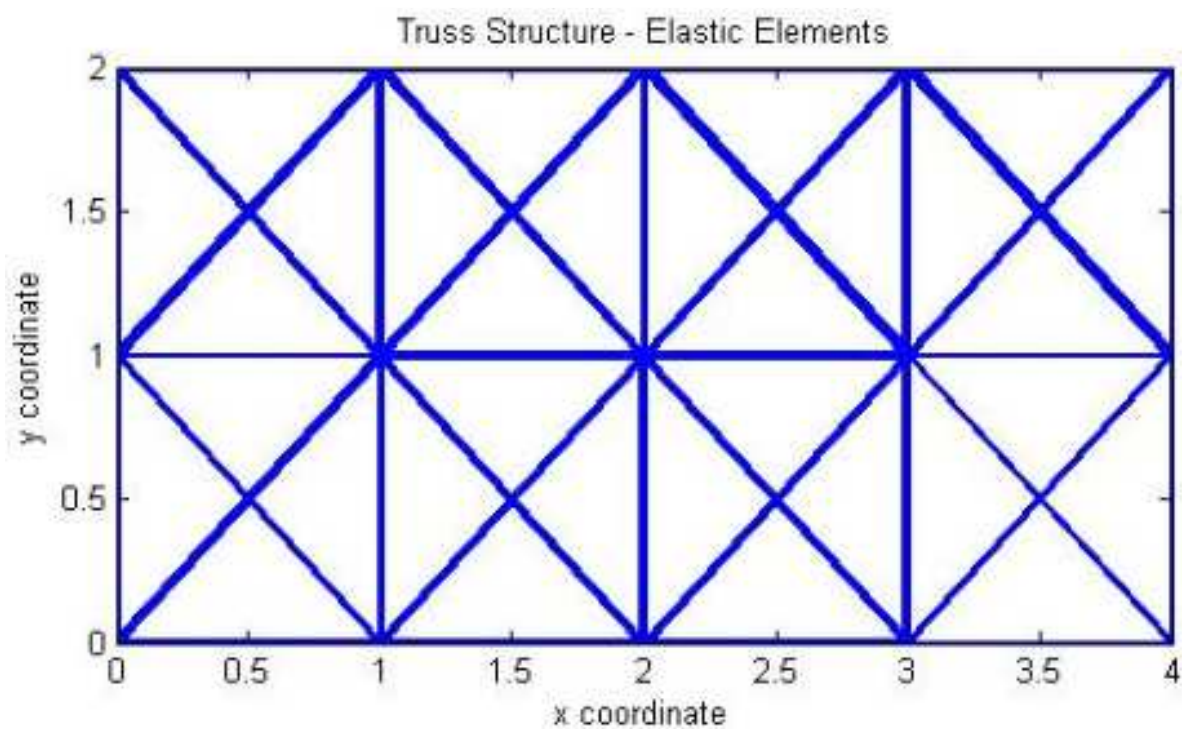


Figura 10.11 - Caso $f = 0.5$ - Distribuição ótima de elementos elásticos

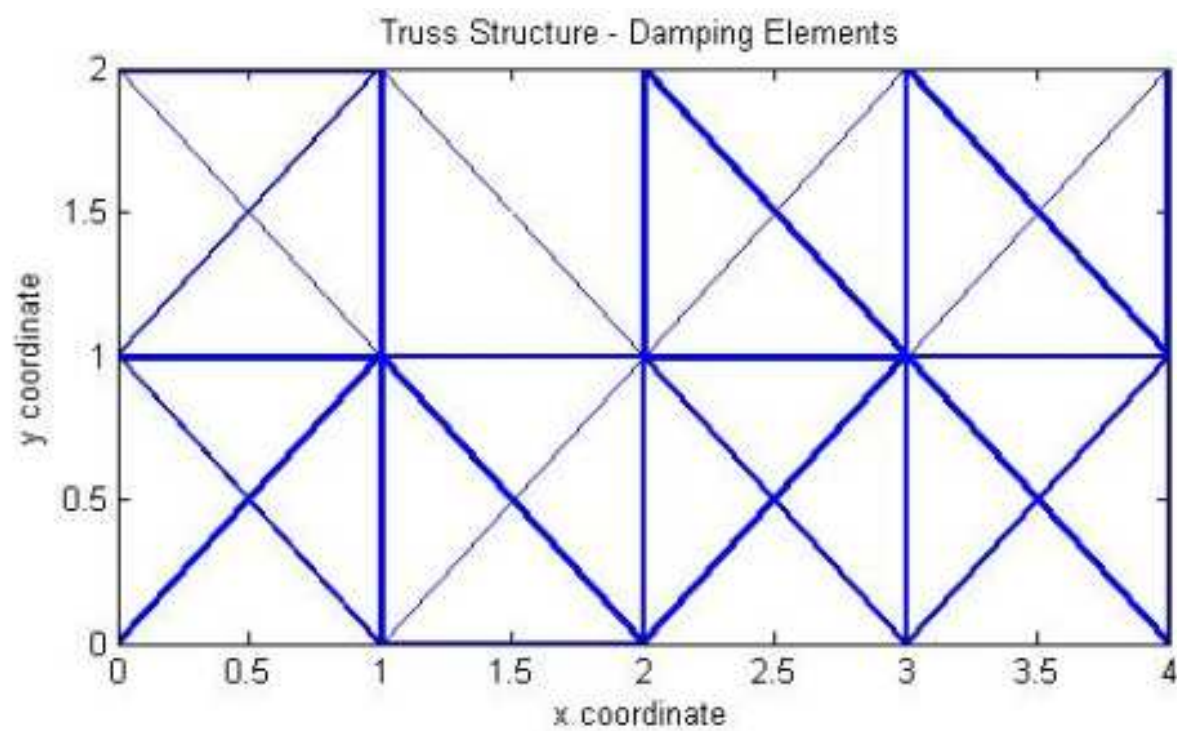


Figura 10.12 - Caso $f = 0.5$ - Distribuição ótima de amortecedores

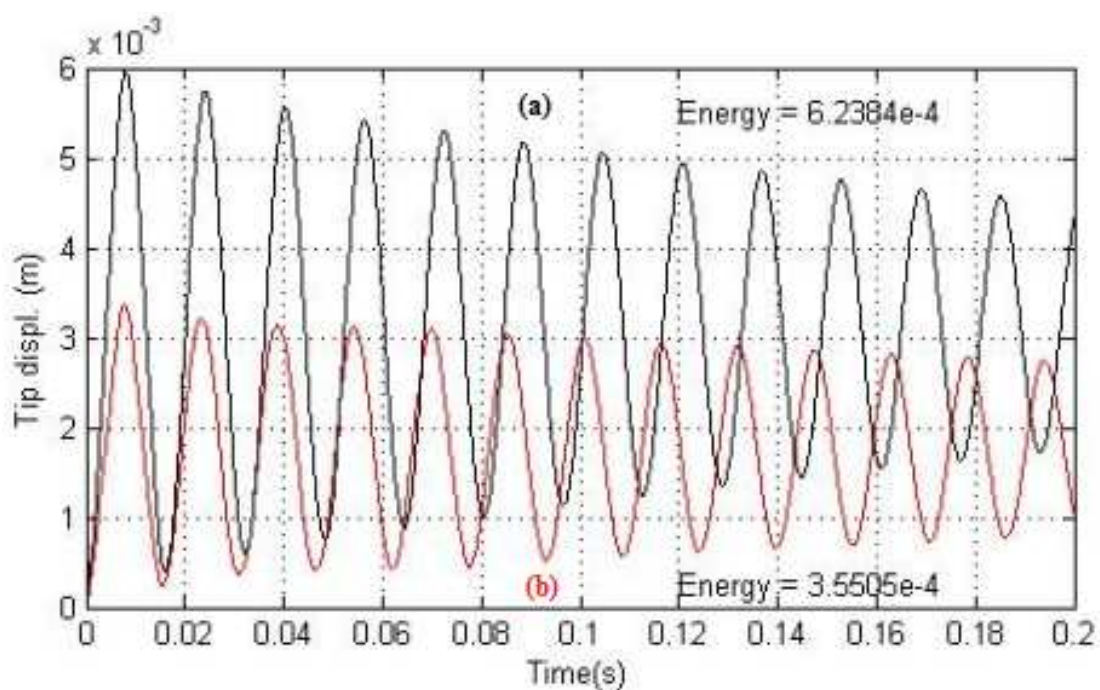


Figura 10.13 - Caso $f = 0.2$ (a) Resposta no tempo da estrutura de referência (b) Resposta no tempo da estrutura otimizada

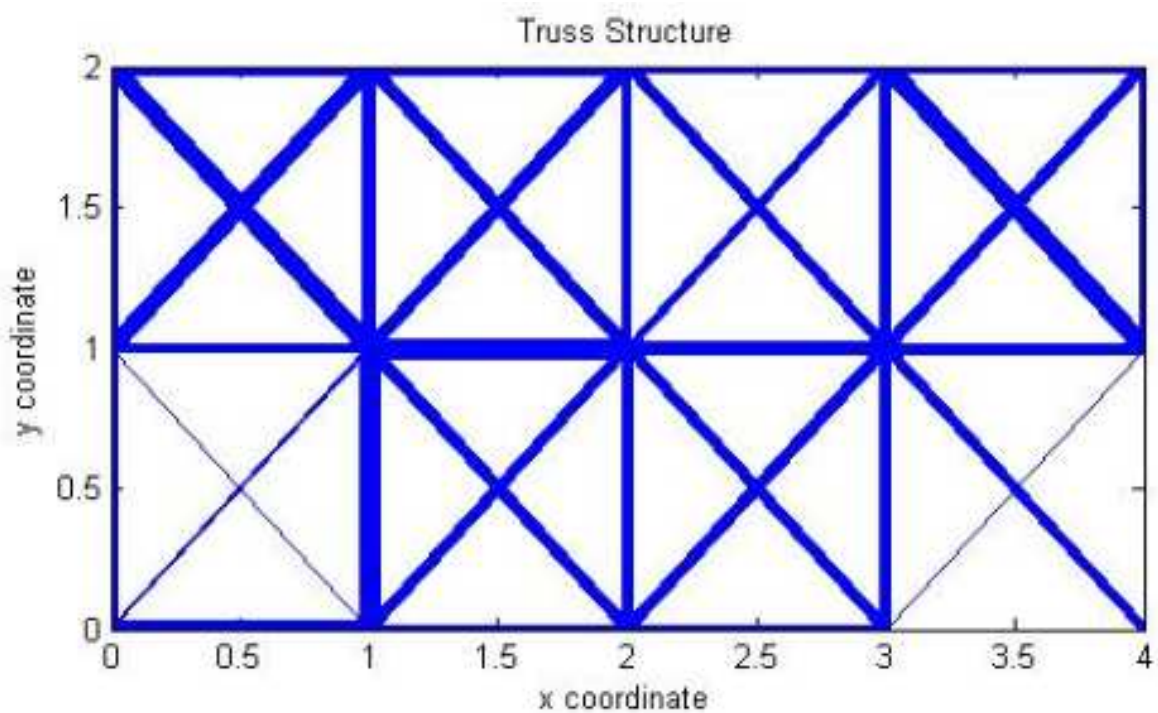


Figura 10.14 - Caso $f = 0.2$ - Estrutura de treliças otimizada

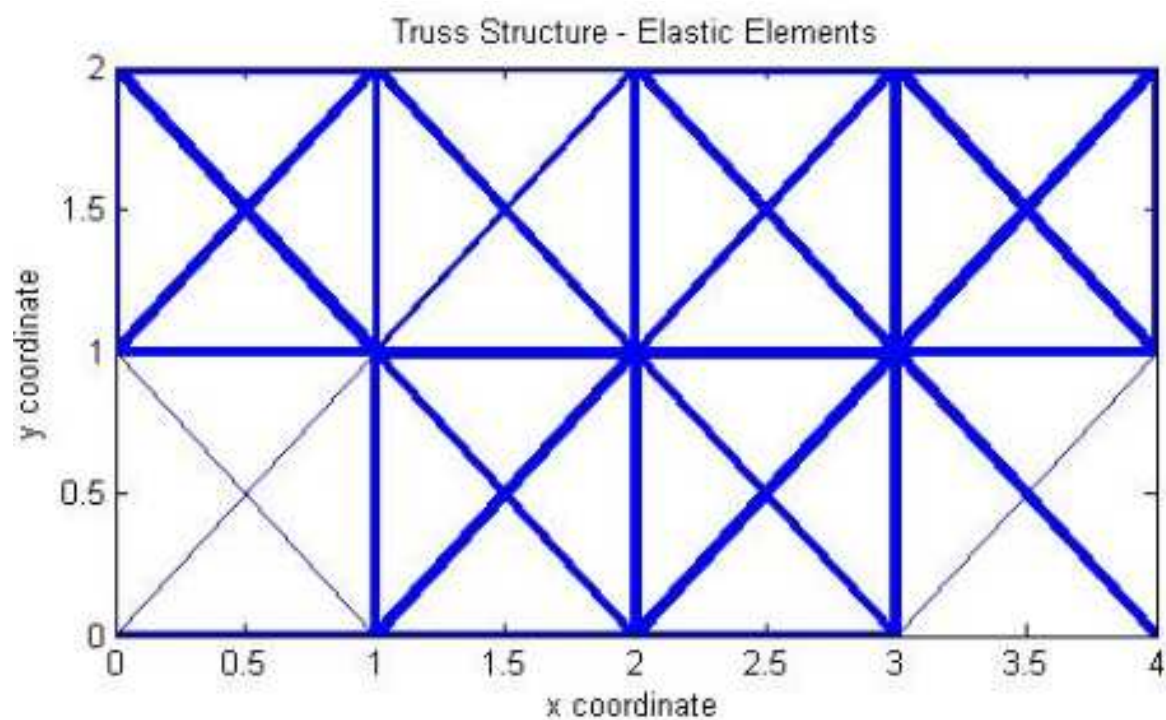


Figura 10.15 - Caso $f = 0.2$ - Distribuição ótima de elementos elásticos

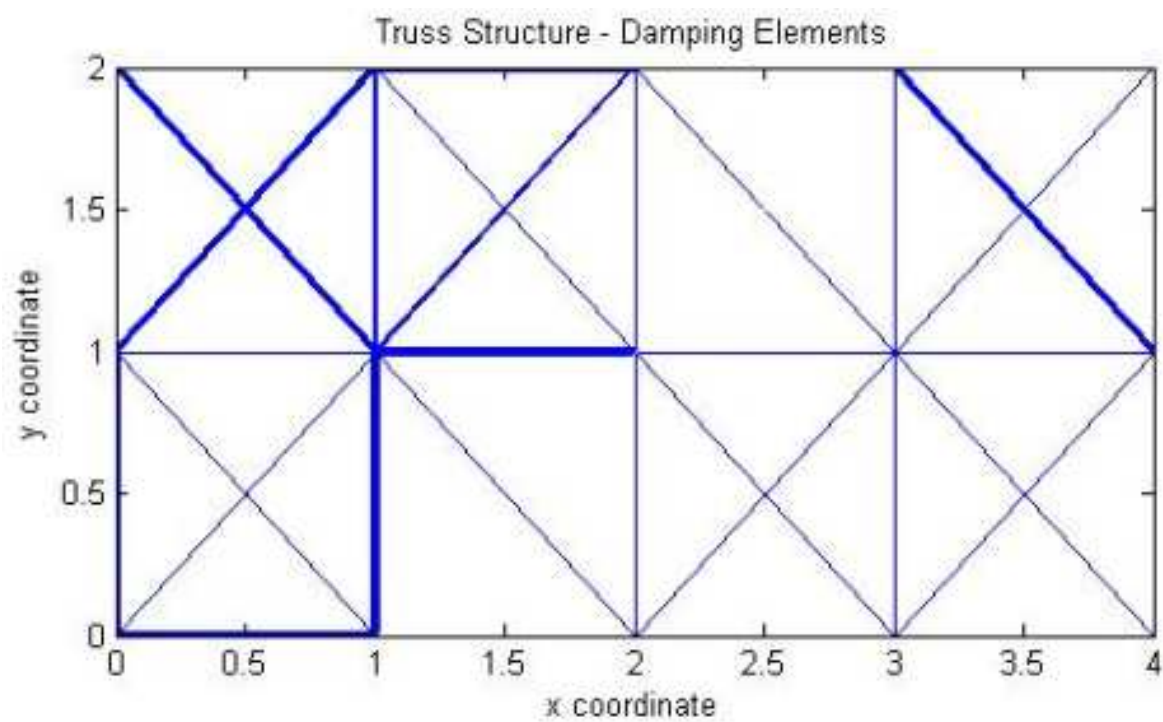


Figura 10.16 - Caso $f = 0.2$ - Distribuição ótima de amortecedores

11. CONCLUSÕES

A partir das figuras apresentadas é possível identificar, para o caso $f^* = 0.7$, uma tendência da solução ótima de diminuir as áreas dos elementos elásticos nas extremidades inferior direita e superior esquerda (Figura 10.7). É possível também ver uma tendência da solução ótima alocar maior área dos amortecedores nas regiões afastadas das condições de contorno (com maiores deslocamentos) aumentando assim a dissipação de energia nesta região (Figura 10.8).

No entanto para os casos $f^* = 0.5$ e $f^* = 0.20$, a tendência de alocação das áreas não é direta. Mesmo assim, pode-se observar, em todos os casos, uma redução da energia associada ao deslocamento do nó analisado em comparação com a estrutura de referência (Figura 10.9 e Figura 10.13).

Uma possibilidade futura de análise deste problema é ampliar o número de treliças empregadas, utilizando o mesmo domínio onde a estrutura de treliças se encontra. Desta forma, seria provavelmente possível enxergar com mais nitidez, a tendência de distribuição de áreas das barras, de modo que ela otimize a função objetivo (Figura 11.1). Outra possibilidade seria também utilizar outras funções objetivo para o problema, de modo a comparar qual formulação para o problema de otimização melhor se adequa a análise em questão.

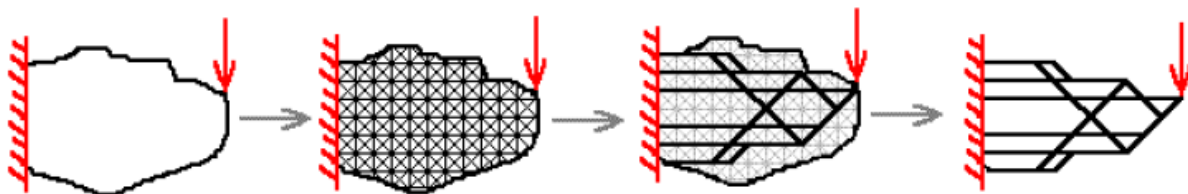


Figura 11.1 - Exemplo de estrutura utilizando um número elevado de elementos de treliça para aplicação da otimização topológica

ANEXO A – Solver programado em Matlab

```
%-----%

% Variable descriptions
% k = element stiffness matrix
% m = element mass matrix
% c = element damping matrix
% kk = system stiffness matrix
% mm = system mass vector
% cc = system damping vector
% ff = system force vector
% index = a vector containing system dofs associated with each element
% gcoord = global coordinate matrix
% prop = element property matrix
% nodes = nodal connectivity matrix for each element
% bcdof = a vector containing dofs associated with boundary conditions
% bcval = a vector containing boundary condition values associated with
%         the dofs in 'bcdof'
%-----%

cd('C:\Users\lury\Desktop\Transient_Truss_Simulation')

format short;

%-----
% control input data
%-----

nel=38;          % number of elements
nnel=2;          % number of nodes per element
ndof=2;          % number of dofs per node
nnode=15;        % total number of nodes in system
sdof=nnode*ndof; % total system dofs
dt=0.0001;       % time step size
ti=0;            % initial time
tf=0.2;          % final time
nt=fix((tf-ti)/dt); % number of time steps
beta = 0.25;     % beta for newmark-beta method
gamma = 0.5;     % gamma for newmark-beta method

%-----
% nodal coordinates (EDITADO-OK)
%-----

gcoord(1,1)=0.0; gcoord(1,2)=0.0;
gcoord(2,1)=1.0; gcoord(2,2)=0.0;
gcoord(3,1)=2.0; gcoord(3,2)=0.0;
gcoord(4,1)=3.0; gcoord(4,2)=0.0;
gcoord(5,1)=4.0; gcoord(5,2)=0.0;

gcoord(6,1)=0.0; gcoord(6,2)=1.0;
gcoord(7,1)=1.0; gcoord(7,2)=1.0;
gcoord(8,1)=2.0; gcoord(8,2)=1.0;
gcoord(9,1)=3.0; gcoord(9,2)=1.0;
gcoord(10,1)=4.0; gcoord(10,2)=1.0;

gcoord(11,1)=0.0; gcoord(11,2)=2.0;
gcoord(12,1)=1.0; gcoord(12,2)=2.0;
```

```

gcoord(13,1)=2.0; gcoord(13,2)=2.0;
gcoord(14,1)=3.0; gcoord(14,2)=2.0;
gcoord(15,1)=4.0; gcoord(15,2)=2.0;

%-----
% material and geometric properties
%-----

prop(1)=210e9;    % elastic modulus
prop(2)=7800;     % density
prop(3)=1e7;      % truss dinamic viscosity

%-----
% nodal connectivity (EDITADO-OK)
%-----

nodes(1,1)=1; nodes(1,2)=2;
nodes(2,1)=6; nodes(2,2)=2;
nodes(3,1)=1; nodes(3,2)=7;
nodes(4,1)=1; nodes(4,2)=6;
nodes(5,1)=2; nodes(5,2)=7;
nodes(6,1)=6; nodes(6,2)=7;
nodes(7,1)=11; nodes(7,2)=7;
nodes(8,1)=6; nodes(8,2)=12;
nodes(9,1)=6; nodes(9,2)=11;

nodes(10,1)=7; nodes(10,2)=12;
nodes(11,1)=11; nodes(11,2)=12;
nodes(12,1)=12; nodes(12,2)=13;
nodes(13,1)=12; nodes(13,2)=8;
nodes(14,1)=7; nodes(14,2)=13;
nodes(15,1)=8; nodes(15,2)=13;
nodes(16,1)=7; nodes(16,2)=8;
nodes(17,1)=7; nodes(17,2)=3;
nodes(18,1)=2; nodes(18,2)=8;
nodes(19,1)=2; nodes(19,2)=3;

nodes(20,1)=3; nodes(20,2)=8;
nodes(21,1)=3; nodes(21,2)=4;
nodes(22,1)=8; nodes(22,2)=4;
nodes(23,1)=3; nodes(23,2)=9;
nodes(24,1)=4; nodes(24,2)=9;
nodes(25,1)=8; nodes(25,2)=9;
nodes(26,1)=13; nodes(26,2)=9;
nodes(27,1)=8; nodes(27,2)=14;
nodes(28,1)=13; nodes(28,2)=14;
nodes(29,1)=9; nodes(29,2)=14;

nodes(30,1)=14; nodes(30,2)=15;
nodes(31,1)=14; nodes(31,2)=10;
nodes(32,1)=9; nodes(32,2)=15;
nodes(33,1)=10; nodes(33,2)=15;
nodes(34,1)=9; nodes(34,2)=10;
nodes(35,1)=9; nodes(35,2)=5;
nodes(36,1)=4; nodes(36,2)=10;
nodes(37,1)=4; nodes(37,2)=5;
nodes(38,1)=5; nodes(38,2)=10;

%-----
% applied constraints

```

```

%-----

nbc=4;      % number of constraints
bcdof(1)=1; % horizontal displacement of node 1 is constrained
bcdof(2)=11; % horizontal displacement of node 16 is constrained
bcdof(3)=21; % horizontal displacement of node 11 is constrained
bcdof(4)=22; % vertical displacement of node 11 is constrained

bcval(1)=0; % whose described value is 0
bcval(2)=0; % whose described value is 0
bcval(3)=0; % whose described value is 0
bcval(4)=0; % whose described value is 0

%-----
% initialization to zero
%-----

kk=zeros(s dof,s dof); % system stiffness matrix
mm=zeros(s dof,s dof); % system mass matrix
cc=zeros(s dof,s dof); % system damping matrix
ff=zeros(s dof,1); % system force vector
index=zeros(nnel*ndof,1); % index vector
acc=zeros(s dof,nt); % acceleration matrix
vel=zeros(s dof,nt); % velocity matrix
disp=zeros(s dof,nt); % displacement matrix
% AREAS_k= zeros(nel,1); % project variables for the optimization
% AREAS_c= zeros(nel,1); % project variables for the optimization
% AREAS_k_MAX= zeros(nel,1);
% AREAS_c_MAX= zeros(nel,1);
% Lowest_Area_k; % input variables for the optimization
% Lowest_Area_c; % input variables for the optimization
% Highest_Area_k; % input variables for the optimization
% Highest_Area_c; % input variables for the optimization
leng= zeros(nel,1); % element length

%-----
% loop for elements
%-----

%Circular transversal areas
% for i=1:nel
% AREAS_k_MAX(i)=Highest_Area_k;
% AREAS_c_MAX(i)=Highest_Area_c;
% end

for iel=1:nel % loop for the total number of elements

nd(1)=nodes(iel,1); % 1st connected node for the (iel)-th element
nd(2)=nodes(iel,2); % 2nd connected node for the (iel)-th element

x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2); % coordinate of 1st node
x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2); % coordinate of 2nd node

leng(iel)=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); % element length

if (x2-x1)==0;
beta=2*atan(1); % angle between local and global axes
else
beta=atan((y2-y1)/(x2-x1));
end

```

```

E=prop(1);      % extract elastic modulus
rho=prop(2);    % extract mass density
eta=prop(3);    % extract dynamic viscosity

index=feeldof(nd,nnel,ndof); % extract system dofs for the element

ipt=1;          % flag for consistent mass matrix
[k,m,c]=fetruss2(iel,E,leng,AREAS_k,AREAS_c,rho,eta,beta,ipt); % element matrix

kk=feasmb1(kk,k,index); % assemble system stiffness matrix
mm=feasmb1(mm,m,index); % assemble system mass matrix
cc=feasmb1(cc,c,index); % assemble system damping matrix

end

%-----
% Modal Analysis
%-----

[eigenvectors,eigenvalues] = modal_analysis(sdof,nbc,mm,cc,kk,ff,bcdof);

%fsol=eig(kk,mm);
%fsol=sqrt(fsol);

% print fem solutions
%num=1:1:sdof;
%freqcy=[num' fsol] % print natural frequency

%-----
% Initial Conditions
%-----

vel(:,1)=zeros(sdof,1); % initial zero velocity
disp(:,1)=zeros(sdof,1); % initial zero displacement

ff(30)=10000; % step force at 30th dof

%-----
% Integration using the Newmark-beta method
%-----

%parameters
prop_newmark = zeros(6,1);
prop_newmark(1)=dt; % time step size
prop_newmark(2)=nt; % number of time steps
prop_newmark(3)=beta; % beta
prop_newmark(4)=gamma; % gamma
prop_newmark(5)=nbc; % number of boundary conditions

[disp,vel,acc] = newmark_beta(sdof,mm,cc,kk,ff,bcdof,prop_newmark,disp,vel);

DISP= disp(30,:);

%-----
% Central Difference Integration
%-----

% %parameters

```

```

% prop_central = zeros(3,1);
% prop_central(1)=dt;           % time step size
% prop_central(2)=nt;           % number of time steps
% prop_central(3)=nbc;          % number of boundary conditions
%
% [disp,vel,acc] = central_difference(sdof,mm,cc,kk,ff,bcdof,prop_central,disp,vel);

%-----
% Energy Calculation
%-----

time=0:dt:nt*dt;
energy=trapz(time,DISP);

%-----
% Volume Fraction Calculation
%-----

V=0;
V_max=0;

for i=1:nel
    V= V+ (AREAS_k(iel)+AREAS_c(iel))*leng(iel);
    V_max= V_max+ (Highest_Area_k + Highest_Area_c)*leng(iel);
end

Volume_Fraction= V/V_max;

%-----
% Plot truss structure and its dynamic behaviour
%-----

Lowest_Area_k = 1e-6;
Lowest_Area_c = 1e-6;
Highest_Area_k = 4e-4;
Highest_Area_c = 4e-4;

% subplot(2,2,1)
% V(1)=min(gcoord(:,1));
% V(2)=max(gcoord(:,1));
% V(3)=min(gcoord(:,2));
% V(4)=max(gcoord(:,2));
% axis(V);
% for iel=1:nel,
%     xp(1)=gcoord(nodes(iel,1),1);
%     xp(2)=gcoord(nodes(iel,2),1);
%     yp(1)=gcoord(nodes(iel,1),2);
%     yp(2)=gcoord(nodes(iel,2),2);
%     handle=plot(xp,yp);
%     area= AREAS_k(iel)+AREAS_c(iel);
%     if area == Lowest_Area_k
%         set(handle,'Color',[1,1,1]);
%     else
%         width = (area- Lowest_Area_k)*7.5*(1/(2*Highest_Area_k - Lowest_Area_k));
%         set(handle,'LineWidth',[width]);
%     end
% if iel==1, hold, end
% end;
% title('Truss Structure');
% xlabel('x coordinate');

```

```

% ylabel('y coordinate');
% hold off
%
% subplot(2,2,2)
% plot(time,disp(30,:))
% xlabel('Time(s)')
% ylabel('Tip displ. (m)')
% grid on;
%
% subplot(2,2,3)
% V(1)=min(gcoord(:,1));
% V(2)=max(gcoord(:,1));
% V(3)=min(gcoord(:,2));
% V(4)=max(gcoord(:,2));
% axis(V);
% for iel=1:nel,
%   xp(1)=gcoord(nodes(iel,1),1);
%   xp(2)=gcoord(nodes(iel,2),1);
%   yp(1)=gcoord(nodes(iel,1),2);
%   yp(2)=gcoord(nodes(iel,2),2);
%   handle=plot(xp,yp);
%   area= AREAS_k(iel);
%   if area == Lowest_Area_k
%       set(handle,'Color',[1,1,1]);
%   else
%       width = (area- Lowest_Area_k)*3.75*(1/(Highest_Area_k - Lowest_Area_k));
%       set(handle,'LineWidth',[width]);
%   end
%   if iel==1, hold, end
% end;
% title('Truss Structure - Elastic Elements');
% xlabel('x coordinate');
% ylabel('y coordinate');
% hold off
%
% subplot(2,2,4)
% V(1)=min(gcoord(:,1));
% V(2)=max(gcoord(:,1));
% V(3)=min(gcoord(:,2));
% V(4)=max(gcoord(:,2));
% axis(V);
% for iel=1:nel,
%   xp(1)=gcoord(nodes(iel,1),1);
%   xp(2)=gcoord(nodes(iel,2),1);
%   yp(1)=gcoord(nodes(iel,1),2);
%   yp(2)=gcoord(nodes(iel,2),2);
%   handle=plot(xp,yp);
%   area= AREAS_c(iel);
%   if area == Lowest_Area_c
%       set(handle,'Color',[1,1,1]);
%   else
%       width = (area- Lowest_Area_c)*3.75*(1/(Highest_Area_c - Lowest_Area_c));
%       set(handle,'LineWidth',[width]);
%   end
%   if iel==1, hold, end
% end;
% title('Truss Structure - Damping Elements');
% xlabel('x coordinate');
% ylabel('y coordinate');
% hold off

```

```

%-----
% Write results' file
%-----

% fid = fopen('results.txt','w');
% fprintf(fid,'Results - Truss Structure\r\n');
% fprintf(fid,'\r\n');
% fprintf(fid,'\r\n');
% fprintf(fid,'Energy\r\n');
% fprintf(fid,'%i\r\n',energy);
% fprintf(fid,'\r\n');
% fprintf(fid,'Volume Fraction\r\n');
% fprintf(fid,'%i\r\n',Volume_Fraction);
% fprintf(fid,'\r\n');
% fprintf(fid,'Element   Area_k       Area_c       Total_Area\r\n');
% fprintf(fid,'\r\n');
% for iel=1:nel
%   fprintf(fid,'%d       %i   %i   %i\r\n',iel,AREAS_k(iel),AREAS_c(iel),AREAS_k(iel)+AREAS_c(iel));
% end
% fprintf(fid,'\r\n');
% fprintf(fid,'t       Displacement\r\n');
% fprintf(fid,'\r\n');
% for inst=1:length(time)
%   fprintf(fid,'%i   %i\r\n',time(inst),disp(30,inst));
% end
% fclose(fid);

```

ANEXO B – Funções em Matlab utilizadas no solver

```
function [kk,mm]=feaplycs(kk,mm,bcdof)

%-----
% Purpose:
%   Apply constraints to eigenvalue matrix equation
%   [kk]{x}=lamda[mm]{x}
%
% Synopsis:
%   [kk,mm]=feaplycs(kk,mm,bcdof)
%
% Variable Description:
%   kk - system stiffness matrix before applying constraints
%   mm - system mass matrix before applying constraints
%   bcdof - a vector containing constrained d.o.f
%-----

n=length(bcdof);
sdof=size(kk);

for i=1:n
    c=bcdof(i);
    for j=1:sdof
        kk(c,j)=0;
        kk(j,c)=0;
        mm(c,j)=0;
        mm(j,c)=0;
    end

    mm(c,c)=1;
end
```

```
function [kk]=feasmb1(kk,k,index)
%-----
% Purpose:
%   Assembly of element matrices into the system matrix
%
% Synopsis:
%   [kk]=feasmb1(kk,k,index)
%
% Variable Description:
%   kk - system matrix
%   k - element matrix
%   index - d.o.f. vector associated with an element
%-----
```

```
edof = length(index);
for i=1:edof
    ii=index(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        kk(ii,jj)=kk(ii,jj)+k(i,j);
    end
end
```

```

function [index]=feeldof(nd,nnel,ndof)
%-----
% Purpose:
%   Compute system dofs associated with each element
%
% Synopsis:
%   [index]=feeldof(nd,nnel,ndof)
%
% Variable Description:
%   index - system dof vector associated with element "iel"
%   iel - element number whose system dofs are to be determined
%   nnel - number of nodes per element
%   ndof - number of dofs per node
%-----

edof = nnel*ndof;
k=0;
for i=1:nnel
    start = (nd(i)-1)*ndof;
    for j=1:ndof
        k=k+1;
        index(k)=start+j;
    end
end

function [k,m,c]=fetruss2(el,E,leng,AREAS_k,AREAS_c,rho,eta,beta,ipt)

%-----
% Purpose:
%   Stiffness and mass matrices for the 2-d truss element
%   nodal dof {u_1 v_1 u_2 v_2}
%
% Synopsis:
%   [k,m,c]=fetruss2(el,leng,area,rho,eta,beta,ipt)
%
% Variable Description:
%   k - element stiffness matrix (size of 4x4)
%   m - element mass matrix (size of 4x4)
%   c - element damping matrix (size of 4x4)
%   E - elastic modulus
%   el- element number
%   leng - element length vector
%   AREAS_k - vector area cross-section of the elastic elements
%   AREAS_c - vector area cross-section of the damping elements
%   rho - mass density (mass per unit volume)
%   eta - truss dynamic Viscosity
%   beta - angle between the local and global axes
%           positive if the local axis is in the ccw direction from
%           the global axis
%   ipt = 1 - consistent mass matrix
%         = 2 - lumped mass matrix
%-----

% stiffness matrix

co=cos(beta); s=sin(beta);
k= (AREAS_k(el)*E/leng(el))*[ co*co  co*s  -co*co  -co*s;...
    co*s  s*s  -co*s  -s*s;...
    -co*co  -co*s  co*co  co*s;...
```

```

        -co*s  -s*s  co*s  s*s];

% damping matrix

c= (AREAS_c(el)*eta/leng(el))*[ co*co  co*s  -co*co  -co*s;...
    co*s  s*s  -co*s  -s*s;...
    -co*co  -co*s  co*co  co*s;...
    -co*s  -s*s  co*s  s*s];

% consistent mass matrix

if ipt==1

    m=(rho*AREAS_k(el)*leng(el)/6)*[ 2*co*co+2*s*s  0  co*co+s*s  0;...
        0  2*co*co+2*s*s  0  co*co+s*s;...
        co*co+s*s  0  2*co*co+2*s*s  0;...
        0  co*co+s*s  0  2*co*co+2*s*s];

% lumped mass matrix

else

    m=(rho*AREAS_k(el)*leng(el)/2)*[ co*co+s*s  0  0  0;...
        0  co*co+s*s  0  0;...
        0  0  co*co+s*s  0;...
        0  0  0  co*co+s*s];

end

function [disp,vel,acc] = newmark_beta(s dof,mm,cc,kk,ff,bcdof,prop_newmark,disp,vel)

%-----
% Perform the integration using the Newmark beta method
%
%-----

dt=prop_newmark(1);           % time step size
nt=prop_newmark(2);           % number of time steps
beta=prop_newmark(3);         % beta
gamma=prop_newmark(4);        % gamma
nbc=prop_newmark(5);          % number of boundary conditions

% Applying the boundary conditions
for i=1:nbc
    ibc=bcdof(i);
    mm(ibc,:)=zeros(1,sdof);
    mm(:,ibc)=zeros(1,sdof);
    mm(ibc,ibc)=1.0;
    cc(ibc,:)=zeros(1,sdof);
    cc(:,ibc)=zeros(1,sdof);
    cc(ibc,ibc)=1.0;
    kk(ibc,:)=zeros(1,sdof);
    kk(:,ibc)=zeros(1,sdof);
    kk(ibc,ibc)=1.0;
end

acc(:,1)=mm\ (ff-cc*vel(:,1)-kk*disp(:,1));

```

```

for it=1:nt

% Solution for accelerations

mm_bar = mm + dt*gamma*cc + dt*dt*beta*kk;
ff_bar = ff - cc*(vel(:,it)+dt*(1-gamma)*acc(:,it)) - kk*(disp(:,it)+dt*vel(:,it)+0.5*dt*dt*(1-2*beta)*acc(:,it));

acc(:,it+1) = mm_bar\ff_bar;

% Solution for the displacements, velocities

disp(:,it+1) = disp(:,it) + dt*vel(:,it) + 0.5*dt*dt*((1-2*beta)*acc(:,it)+2*beta*acc(:,it+1));
vel(:,it+1) = vel(:,it) + dt*((1-gamma)*acc(:,it)+gamma*acc(:,it+1));

end

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LIMA, C. R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis usando o Método de Otimização Topológica**. São Paulo: [s.n.], 2002. Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.
2. SILVA, M. C. D. **Aplicação do Método de Otimização Topológica para o Projeto de Mecanismos Flexíveis menos suscetíveis a ocorrência de dobradiças**. São Paulo: ed. rev., 2007. Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.
3. SILVA, E. C. N. **Apostila de aula - Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas**. São Paulo: [s.n.].
4. LIPPI, T. N. **Restrições de Manufatura aplicadas ao Método de Otimização Topológica**. São Paulo: ed. rev., 2008. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.
5. HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1992.
6. SILVA, E. C. N. **Apostila do curso PMR5215 - Otimização aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos - Escola Politécnica da USP**. São Paulo: [s.n.].
7. KWON, Y.; BANG, H. **The Finite Element Method using Matlab**. [S.l.]: [s.n.].
8. HARZHEIM, L. **Strukturoptimierung, Grundlagen und Anwendungen**. [S.l.]: Harri Deutsch, 2008.
9. BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. New York, EUA: Springer, 2003.